Modelação e Controlo de um Sistema de Duas Máquinas em Série Incluindo Avarias e Produção de Lotes

José António Alves Moreira
Instituto Superior Técnico

Orientador
Professor Carlos Filipe Gomes Bispo

25 de Outubro de 1998

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste relatório pretende-se descrever os resultados obtidos referentes ao estudo da modelação e controlo de um sistema de duas máquinas em série com avarias e produção de lotes. Este trabalho realizou-se no âmbito do trabalho de fim de curso necessário à obtenção do grau de licenciado no curso de engenharia electrotécnica e computadores do Instituto Superior Técnico.
Na figura 1.1 está representada uma descrição gráfica do sistema que se pretende estudar. Pode-se observar que existe um "buffer" inicial ilimitado de onde a máquina 2 retira a matéria prima para produzir uma peça semi-acabada que deposita no "buffer" intermédio i_2. A máquina 1 retira as peças semi-acabadas do "buffer" intermédio e processas colocando a peça final no "buffer" de saída i_1, de onde a procura vai retirar peças. Ambos os "buffers" têm um espaço de armazenamento ilimitado.

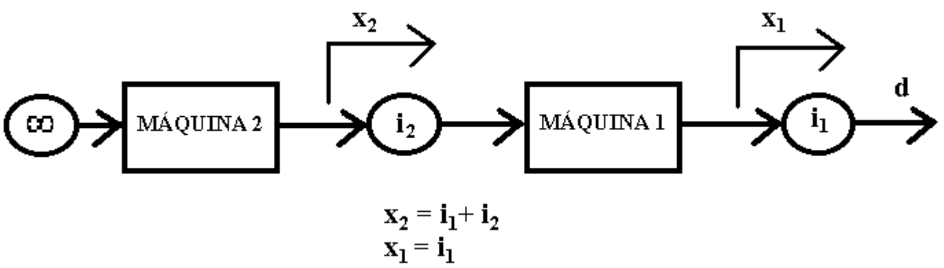

Figura 1.1: Modelo do sistema.

Considera-se para este sistema que, quando não existe inventário no "buffer" final, o pedido de encomenda é memorizado até que possa ser satisfeito pelo sistema. Este procedimento é conhecido pela designação de "backlog", e é implementado através de permitir que o inventário do "buffer" final possa assumir valores negativos, que correspondem ao número de peças encomendadas que ainda não foram produzidas.

Para este sistema considera-se como hipótese de trabalho que só a máquina 1 poderá produzir lotes de peças. Considera-se também que se uma máquina avariar enquanto está a produzir uma peça ou um lote de peças, essas peças não são descartadas ou destruídas e que ao avariarem, as máquinas entram imediatamente em reparação.

O estado será representado pelo inventário existente nos "buffers", pelo estado das máquinas (avariada ou a funcionar) e pelo número de peças que estão a ser produzidas num lote pela máquina 1.

O controlo deste sistema resume-se a determinar a taxa de produção de cada uma das máquinas para cada estado do sistema, ou seja o número de peças que cada máquina deve produzir por unidade de tempo notando que as máquinas têm uma capacidade limitada logo, irá existir uma taxa máxima de produção para cada uma delas.

Modela-se os tempos de produção das máquinas para este sistema como sendo variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade exponencial negativa, e a procura como sendo um processo estocástico estacionário de Poisson. Estas duas hipóteses permitem tratar este sistema dentro do paradigma de modelação das cadeias de Markov a tempo contínuo (ver [1] e [2]). Este resultado permite que o sistema seja estudado utilizando as diversas ferramentas matemáticas que existem para estudar as cadeias de Markov a tempo contínuo.

Este problema já foi estudado por outros autores mas em condições diferentes. Em [3] é efectuado um estudo de um sistema de duas máquinas em série sem avarias e sem produção de lotes, com tempos de produção definidos por uma distribuição exponencial negativa e a procura por um processo de Poisson.

Em [4] é apresentado um estudo de um sistema de duas máquinas em série com avarias em que a procura é determinística. Os autores também introduzem o conceito de "two-boundary control" como uma aproximação sub-óptima à política de controlo óptimo para este tipo de sistemas.

O inventário que existe no sistema será representado utilizando dois conjuntos de variáveis. O primeiro conjunto que se denomina de variáveis de inventário real (i_1, i_2), representam o inventário real que existe em cada um dos "buffers" do sistema. O segundo conjunto denomina-se de variáveis do inventário escalão (x_1, x_2) e representam a soma dos inventários reais que existem desde a máquina a qual a variável está associada até ao fim do sistema, incluindo o "buffer" de saída.

O nome de inventário escalão advêm da palavra anglo-saxónica "echelon" que é utilizada para descrever estas variáveis de inventário, e é na interpertaçao militar do significado desta palavra que se obtém o seu significado. A palavra escalão indica uma forma de dispor tropas num campo de batalha em vários planos e em profundidade, o que no caso deste sistema representa a capacidade de observar o inventário em níveis diferentes (a primeira variável indica o inventário final do sistema e a última indica o inventário total).

Os resultados apresentados neste relatório dividem-se em duas áreas. A primeira, que representa o núcleo do projecto, descreve a modelação e o cálculo das políticas de controlo óptimo para um sistema com avarias e produção de lotes. Também se apresenta os resultados da modelação e do cálculo das políticas de controlo óptimo para casos mais simples do sistema anterior, em que se retira a possibilidade das máquinas avariarem e da máquina 1 produzir lotes de peças.

A segunda área refere-se ao estudo do desenvolvimento e aplicação de funções de custo elementar diferentes no cálculo das políticas de controlo óptimo, e comparar as diferenças de desempenho do sistema que existem entre as políticas de controlo óptimo obtidas utilizando estas duas funções de custo elementar.

Este relatório só descreve parte do trabalho realizado no âmbito do trabalho final de curso, em [5] está documentado um pacote de software que foi desenvolvido para permitir o cálculo e a simulação de todos os resultados incluidos neste relatório. O autor também efectuou um estudo das várias técnicas e algoritmos no âmbito da programação dinâmica e da simulação de eventos discretos para encontrar as melhores ferramentas que se adequavam à obtenção dos resultados pretendidos.

Capítulo 2

Modelação do sistema

Neste capítulo apresenta-se a modelação de um sistema de duas máquinas em série com avarias e com produção de lotes pela máquina 1. Também será apresentada a modelação deste sistema para instâncias mais simples do modelo inicial.

Considera-se que existe uma taxa de chegada de encomendas λ que é modelada por um processo estacionário de Poisson, uma taxa de produção u_1 e u_2 para as máquinas 1 e 2 respectivamente, uma taxa de avarias para as máquinas ϕ_1 e ϕ_2 respectivamente e uma taxa de reparação das máquinas ξ_1 e ξ_2.

Os tempos de produção, avaria e reparação das máquinas são modelados por uma distribuição exponencial negativa.

Assume-se que para este sistema a probabilidade de acontecerem dois ou mais eventos simultaneamente é nula. Por exemplo, não é possível ambas as máquinas terminarem a produção de uma peça ao mesmo tempo ou que a máquina 1 termine de produzir uma peça ao mesmo tempo que chega uma encomenda de uma peça.

Como já foi indicado anteriormente, este sistema será modelado por uma cadeia de Markov a tempo contínuo, na secção 2.1 modela-se o sistema constituido por duas máquina em série com avarias e produção de lotes pela máquina 1, apresenta-se também o procedimento de uniformização que é necessário aplicar à cadeia de Markov resultante. Na secção 2.2 descreve-se a modelação das instâncias mais simples do sistema, ou seja, para o caso em que não existem avarias ou produção de lotes; para o caso em que só existem avarias; e o caso em que só existe produção de lotes pela máquina 1.

2.1 Modelação de um sistema de duas máquinas em série com avarias e com produção de lotes pela máquina 1

Nesta secção apresenta-se a modelação de um sistema de duas máquinas em série com avarias e com produção de lotes pela máquina 1 através de uma cadeia de Markov a tempo contínuo. Apresenta-se também o procedimento de uniformização que é necessário aplicar à cadeia de Markov a tempo contínuo para posteriormente calcular a política de controlo óptimo para este sistema.

Para modelar este sistema é necessário utilizar um vector de estado $x(t)$ com cinco variáveis de estado

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) \tag{2.1}$$

em que $(x_1(t), x_2(t))$ representa o valor do inventário escalão no instante temporal t, $(x_3(t), x_4(t))$ representa o estado das máquinas no instante temporal t que é definido por

$$x_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{se a máquina 1 está operacional no instante } t, \\ 0 & \text{se a máquina 1 está avariada no instante } t, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} 1 & \text{se a máquina 2 está operacional no instante } t, \\ 0 & \text{se a máquina 2 está avariada no instante } t. \end{cases} \tag{2.3}$$

$x_5(t)$ representa o número de peças que estão a ser produzidas num lote pela máquina 1.

No restante texto deste relatório, retira-se a dependência explicita das variáveis com o tempo, para facilitar a notação.

As variáveis de controlo associadas a este problema serão u_1,u_2 e b em que u_1 e u_2 representam a taxa de produção das máquinas 1 e 2 respectivamente sendo definidas tal que

$$u_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} u_1 & \text{a máquina 1 produz uma peça à taxa de produção } u_1 \in [0, \mu_1], \\ 0 & \text{a máquina 1 está parada,} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} u_2 & \text{a máquina 2 produz uma peça à taxa de produção } u_2 \in [0, \mu_2], \\ 0 & \text{a máquina 2 está parada,} \end{cases} \tag{2.5}$$

em que μ_1 e μ_2 representam o valor máximo da taxa de produção para a máquina 1 e 2 respectivamente. A variável de controlo b representa o número de peças que devem ser produzidas num lote pela máquina 1 tal que

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{0, ..., b_{max}\} \tag{2.6}$$

em que b_{max} é o número máximo de peças que podem ser produzidas num lote.

A inclusão da variável x_5 no vector de estado do sistema é de extrema importância, porque é necessário que a máquina 2, ao decidir se deve produzir uma peça ou não, saiba quantas peças a máquina 1 vai produzir, porque só assim saberá quantas peças semi-acabadas irão ser retiradas do "buffer" intermédio.

Este modelo é denominado modelo II em [6], onde também é definido um outro modelo denominado modelo I em que não é incluida no vector de estado do sistema a variável x_5, ou seja a máquina 2 ao tomar uma decisão não terá conhecimento do número de peças que a máquina 1 está a produzir num lote. Será verificado nos capítulos seguintes que as políticas de controlo óptimo obtidas com os dois modelos, terão diferenças significativas.

Tendo definido o vector de estado, pode-se agora definir as transições de estado associadas a cada estado do sistema. Existem dois conjuntos de transições possíveis para cada estado, as transições não controladas (por exemplo a chegada de procura ou a avaria de uma máquina) e as transições controladas que correspondem à produção de peças pelas máquinas. O cálculo do controlo óptimo para este sistema corresponde a decidir se um dado estado deve ter associado além das transições não controladas um dado conjunto de transições controladas (ver figura 2.1).

Define-se as transições de estado possíveis para este sistema, através de um conjunto de operadores de transição O^b. Note-se que foi incluida a variável de controlo b no operador de transição O. A necessidade de incluir esta variável de controlo no operador de transição, deve-se a que quando o sistema está no

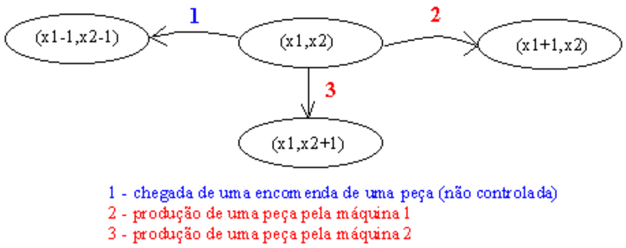

Figura 2.1: Exemplo de um possível conjunto de transições controladas e não controladas para o estado (x_1, x_2) (não se considera avarias ou produção de lotes).

estado $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$, e é decidido que neste estado a máquina 1 deve produzir um lote de b peças, deverá então transitar para o estado (x_1, x_2, x_3, x_4, b) para indicar à máquina 2 que a máquina 1 está a produzir um lote de b peças. Mas esta transição é uma transição imediata e de probabilidade 1, o que levaria a modelar o sistema como uma cadeia semi-Markoviana. Para resolver este problema aplica-se o seguinte procedimento:

> Quando o sistema está no estado $(x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$ e foi decidido produzir um lote de b peças pela máquina 1, então a primeira transição que acontecer neste estado, deve levar o sistema para o estado $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, b)$, incluindo então o número de peças que a máquina 1 está a produzir num lote no vector de estado.

Logo, a maioria dos operadores de transição, irá depender do controlo aplicado na máquina 1. Se o sistema está no estado $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ em que $x_5 \neq 0$, então os operadores de transição deverão deixar inalterado o valor de x_5. Excepção feita para o operador de transição correspondente à produção de um lote pela máquina 1.

Como já foi definido o vector de estado e a forma dos operadores de transição, pode-se agora apresentar quais os operadores de transição que existem para este sistema:

1. Transição de estado devido à chegada de um pedido de uma peça que será retirada do inventário do "buffer" final.

$$D^b x = \begin{cases} (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3, x_4, b) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3, x_4, x_5) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

   Note-se que existem duas hipóteses:

   - Na primeira, se $x_5 = 0$ o operador de transição tem de incluir no vector de estado a informação do número de peças a produzir num lote pela máquina 1.
   - Na segunda hipótese, se $x_5 \neq 0$ o operador de transição de estado não modifica o valor da variável x_5.

2. Transição de estado devido à produção de um lote de b peças pela máquina 1.

$$P_1^b x \begin{cases} (x_1 + b, x_2, x_3, x_4, 0) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1 + x_5, x_2, x_3, x_4, 0) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

3. Transição de estado devido à produção de uma peça pela máquina 2.

$$P_2^b x = \begin{cases} (x_1, x_2 + 1, x_3, x_4, b) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1, x_2 + 1, x_3, x_4, x_5) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

4. Transição de estado devido à avaria da máquina 1.

$$A_1^b x = \begin{cases} (x_1, x_2, 0, x_4, b) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1, x_2, 0, x_4, x_5) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

5. Transição de estado devido à avaria da máquina 2.

$$A_2^b x = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, 0, b) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1, x_2, x_3, 0, x_5) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

6. Transição de estado devido à reparação da máquina 1.

$$R_1^b x = (x_1, x_2, 1, x_4, x_5) \tag{2.12}$$

   Note-se que este operador não depende de b, porque não pode existir controlo para a máquina 1 quando ela está avariada.

7. Transição de estado devido à reparação da máquina 2.

$$R_2^b x = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, 1, b) & \text{se } x_5 = 0, \\ (x_1, x_2, x_3, 1, x_5) & \text{se } x_5 \neq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Note-se que p_1^b e p_2^b serão as transições controladas e elas só irão existir para um dado estado se a política de controlo decidir que elas devem existir. Também se deve observar que como estamos na presença de um sistema estocástico, a cada um dos operadores de transição estará associado uma probabilidade de transição para um dado estado.

O problema da cadeia de Markov a tempo contínuo obtida pela modelação descrita anteriormente é que a taxa de transição total (a taxa de transição de um dado estado independentemente do evento que a provocou) associada a um dado estado depende do controlo aplicado nas máquinas para esse dado estado (por exemplo se a política de controlo para um dado estado é que ambas as máquinas devem produzir então a taxa de transição total para esse dado estado será $\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2$, mas se o controlo for ambas as máquinas ficarem paradas então a taxa de transição total para esse estado será $\lambda + \phi_1 + \phi_2$), para se poder aplicar a teoria de cálculo da política de controlo óptimo para sistemas discretos desenvolvida em [7] é necessário uniformizar a cadeia de Markov a tempo contínuo de maneira a obter uma taxa de transição total igual para todos os estados independentemente do controlo.

O procedimento de uniformização consiste em acrescentar a cada estado uma transição fícticia para o próprio estado de maneira a uniformizar a taxa de transição para todos os estados. Este procedimento é descrito pela equação

$$\widetilde{p}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})] = \begin{cases} \frac{\nu_{\mathbf{x}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]}{\nu} p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})] & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ 1 - \frac{\nu_{\mathbf{x}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]}{\nu} & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Em que $p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ representa a probabilidade de transição do estado $\mathbf{x}$ para o estado $\mathbf{y}$ quando o controlo aplicado é $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\widetilde{p}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ representa a nova probabilidade de transição obtida pelo procedimento de uniformização do estado $\mathbf{x}$ para o estado $\mathbf{y}$ quando o controlo aplicado é $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. $\nu_{\mathbf{x}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})]$ representa a taxa de transição do estado $\mathbf{x}$ se o controlo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ for aplicado, e ν representa uma nova taxa de transição que é arbitrada e que deve satisfazer a expressão

$$\nu \geq \nu_{\mathbf{x}}[\mathbf{u}(\mathbf{x})] \ \forall \mathbf{x}. \tag{2.15}$$

Note-se que foi criado para cada estado uma nova transição para o próprio estado. Depois de aplicarmos este procedimento a todos os estados da cadeia de Markov a tempo contínuo obtemos uma nova cadeia de Markov a tempo contínuo uniformizada que é equivalente a uma cadeia de Markov discreta no tempo, ([7],pag. 247).

De seguida calcula-se as probabilidades de transição uniformizadas para cada um dos operadores de transição. É necessário dividir o espaço de estados em regiões disjuntas conforme o conjunto de transições que são possíveis para cada estado. Para normalizar esta cadeia de Markov contínua, arbitra-se para o valor da taxa de transição uniforme, a soma de todas as taxas de transição para este sistema.

$\nu = \lambda + \mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2 + \xi_1 + \xi_2$

Região 1: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{1})$ e $\mathbf{x_5} = \mathbf{0}$

$\nu_1 = \lambda + u_1 + u_2 + \phi_1 + \phi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_1} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_1}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_1} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{2.16}$$

$$P_{P_1^b} = \frac{u_1}{\nu_1} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_1}{\nu} \times \frac{u_1}{\nu_1} = \frac{u_1}{\nu} \tag{2.17}$$

$$P_{P_2^b} = \frac{u_2}{\nu_1} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_1}{\nu} \times \frac{u_2}{\nu_1} = \frac{u_2}{\nu} \tag{2.18}$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_1} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_1}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_1} = \frac{\phi_1}{\nu} \tag{2.19}$$

$$P_{A_2^b} = \frac{\phi_2}{\nu_1} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_1}{\nu} \times \frac{\phi_2}{\nu_1} = \frac{\phi_2}{\nu} \tag{2.20}$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \xi_1 + \xi_2 - u_1 - u_2}{\nu} \tag{2.21}$$

P_{O^b} representa a probabilidade da transição associada ao operador O^b para esta regiaão.

Região 2: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{1})$ **e** $\mathbf{x_5} \neq \mathbf{0}$

$\nu_2 = \lambda + \mu_1 + u_2 + \phi_1 + \phi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_2} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_2}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_2} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{2.22}$$

$$P_{P_1^b} = \frac{\mu_1}{\nu_2} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_2}{\nu} \times \frac{\mu_1}{\nu_2} = \frac{\mu_1}{\nu} \tag{2.23}$$

$$P_{P_2^b} = \frac{u_2}{\nu_2} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_2}{\nu} \times \frac{u_2}{\nu_2} = \frac{u_2}{\nu} \tag{2.24}$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_2} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_1^b} = \frac{\nu_2}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_2} = \frac{\phi_1}{\nu} \tag{2.25}$$

$$P_{A_2^b} = \frac{\phi_2}{\nu_2} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_2^b} = \frac{\nu_2}{\nu} \times \frac{\phi_2}{\nu_2} = \frac{\phi_2}{\nu} \tag{2.26}$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{\mu_2 + \xi_1 + \xi_2 - u_2}{\nu} \tag{2.27}$$

Note-se que nesta região o controlo para a máquina 1 já foi decidido anteriormente, porque $x_5 \neq 0$. Será demonstrado no capítulo 4 que o valor da taxa de produção da máquina 1 será μ_1. Logo na modelação da cadeia de Markov para esta região utiliza-se o valor $\frac{\mu_1}{\nu}$ para a probabilidade associada ao operador de transição de estado P_1^b.

Região 3: $(\mathbf{x_3} = \mathbf{0}, \mathbf{x_4} = \mathbf{0})$

$\nu_3 = \lambda + \xi_1 + \xi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_3} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_3}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_3} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{2.28}$$

$$P_{R_1^b} = \frac{\xi_1}{\nu_3} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_1^b} = \frac{\nu_3}{\nu} \times \frac{\xi_1}{\nu_3} = \frac{\xi_1}{\nu} \tag{2.29}$$

$$P_{R_2^b} = \frac{\xi_2}{\nu_3} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_2^b} = \frac{\nu_3}{\nu} \times \frac{\xi_2}{\nu_3} = \frac{\xi_2}{\nu} \tag{2.30}$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2}{\nu} \tag{2.31}$$

Região 4: $(\mathbf{x_3} = \mathbf{0}, \mathbf{x_4} = \mathbf{1})$

$\nu_4 = \lambda + u_2 + \phi_2 + \xi_1$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_4} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_4}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_4} = \frac{\lambda}{\nu} \quad (2.32)$$

$$P_{P_2^b} = \frac{u_2}{\nu_4} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_2^b} = \frac{\nu_4}{\nu} \times \frac{u_2}{\nu_4} = \frac{u_2}{\nu} \quad (2.33)$$

$$P_{A_2^b} = \frac{\phi_2}{\nu_4} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_2^b} = \frac{\nu_4}{\nu} \times \frac{\phi_2}{\nu_4} = \frac{\phi_2}{\nu} \quad (2.34)$$

$$P_{R_1^b} = \frac{\xi_1}{\nu_4} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_1^b} = \frac{\nu_4}{\nu} \times \frac{\xi_1}{\nu_4} = \frac{\xi_1}{\nu} \quad (2.35)$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \xi_2 - u_2}{\nu} \quad (2.36)$$

Região 5: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{0})$ **e** $\mathbf{x_5} = \mathbf{0}$

$\nu_5 = \lambda + u_1 + \phi_1 + \xi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_5} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_5}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_5} = \frac{\lambda}{\nu} \quad (2.37)$$

$$P_{P_1^b} = \frac{u_1}{\nu_5} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_5}{\nu} \times \frac{u_1}{\nu_5} = \frac{u_1}{\nu} \quad (2.38)$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_5} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_1^b} = \frac{\nu_5}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_5} = \frac{\phi_1}{\nu} \quad (2.39)$$

$$P_{R_2^b} = \frac{\xi_2}{\nu_5} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_2^b} = \frac{\nu_5}{\nu} \times \frac{\xi_2}{\nu_5} = \frac{\xi_2}{\nu} \quad (2.40)$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \phi_2 + \xi_1 - u_1}{\nu} \quad (2.41)$$

Região 6: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{0})$ **e** $\mathbf{x_5} \neq \mathbf{0}$

$\nu_6 = \lambda + \mu_1 + \phi_1 + \xi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_6} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_6}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_6} = \frac{\lambda}{\nu} \quad (2.42)$$

$$P_{P_1^b} = \frac{\mu_1}{\nu_6} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_1^b} = \frac{\nu_6}{\nu} \times \frac{\mu_1}{\nu_6} = \frac{\mu_1}{\nu} \quad (2.43)$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_6} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_1^b} = \frac{\nu_6}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_6} = \frac{\phi_1}{\nu} \quad (2.44)$$

$$P_{R_2^b} = \frac{\xi_2}{\nu_6} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_2^b} = \frac{\nu_6}{\nu} \times \frac{\xi_2}{\nu_6} = \frac{\xi_2}{\nu} \quad (2.45)$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_6}{\nu} = \frac{\mu_2 + \phi_2 + \xi_1}{\nu} \quad (2.46)$$

Região 7: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{0})$ **e** $\mathbf{x_5} = \mathbf{0}$

$\nu_7 = \lambda + \phi_1 + \xi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_7} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_7}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_7} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{2.47}$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_7} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_1^b} = \frac{\nu_7}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_7} = \frac{\phi_1}{\nu} \tag{2.48}$$

$$P_{R_2^b} = \frac{\xi_2}{\nu_7} \Rightarrow \widetilde{P}_{R_2^b} = \frac{\nu_7}{\nu} \times \frac{\xi_2}{\nu_7} = \frac{\xi_2}{\nu} \tag{2.49}$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_7}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \phi_2 + \xi_1}{\nu} \tag{2.50}$$

Região 8: $(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3} = \mathbf{1}, \mathbf{x_4} = \mathbf{1})$ **e** $\mathbf{x_5} = \mathbf{0}$

$\nu_8 = \lambda + u_2 + \phi_1 + \phi_2$

$$P_{D^b} = \frac{\lambda}{\nu_8} \Rightarrow \widetilde{P}_{D^b} = \frac{\nu_8}{\nu} \times \frac{\lambda}{\nu_8} = \frac{\lambda}{\nu} \tag{2.51}$$

$$P_{P_2^b} = \frac{u_2}{\nu_8} \Rightarrow \widetilde{P}_{P_2^b} = \frac{\nu_8}{\nu} \times \frac{u_2}{\nu_8} = \frac{u_2}{\nu} \tag{2.52}$$

$$P_{A_1^b} = \frac{\phi_1}{\nu_8} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_1^b} = \frac{\nu_8}{\nu} \times \frac{\phi_1}{\nu_8} = \frac{\phi_1}{\nu} \tag{2.53}$$

$$P_{A_2^b} = \frac{\phi_2}{\nu_8} \Rightarrow \widetilde{P}_{A_2^b} = \frac{\nu_8}{\nu} \times \frac{\phi_2}{\nu_8} = \frac{\phi_2}{\nu} \tag{2.54}$$

$$1 - \frac{\nu_x(u)}{\nu} = 1 - \frac{\nu_8}{\nu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \xi_1 + \xi_2 - u_2}{\nu} \tag{2.55}$$

2.2 Modelação para instâncias mais simples do sistema

Nesta secção será apresentada a modelação deste sistema para instâncias mais simples, nomeadamente para o caso em que não existem avarias e produção de lotes, para o caso em que existem avarias nas máquinas, e finalmente para o caso em que só existe produção de lotes pela máquina 1.

Será apresentado primeiro um conjunto de diagramas de transição para cada uma das instâncias do sistema e finalmente será apresentada uma tabela comparativa da modelação para todas as instâncias do sistema.

Nas tabelas 2.1 e 2.2 estão representadas as diferenças que existem para cada uma das instâncias que o sistema pode assumir. Nas sub-secções seguintes estão representadas as formas que a cadeia de Markov assume para cada uma dessas instâncias.

2.2.1 Sem produção de lotes e sem avarias

Note-se que para esta instância do sistema como não existe produção de lotes, a variável de controlo b não existe, ou poder-se-á afirmar que existe mas em que o valor de b_{max} será 1.

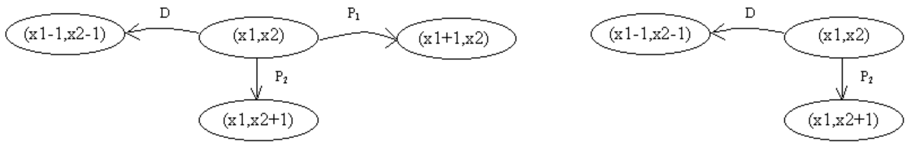

Figura 2.2: $(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ (esquerda) ; $(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ (direita)

2.2.2 Com produção de lotes e sem avarias

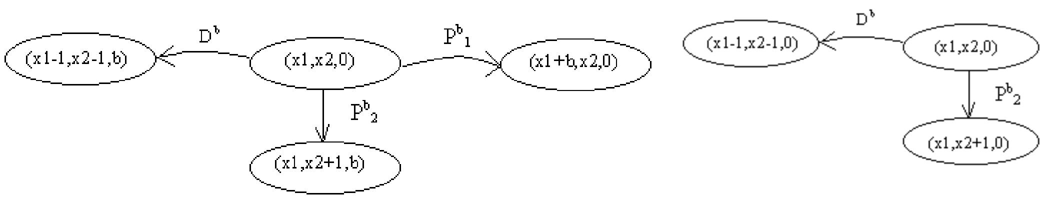

Figura 2.3: $(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x_5 = 0}$ (esquerda) ; $(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x_5 = 0}$ (direita)

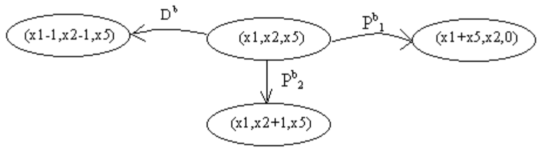

Figura 2.4: $\mathbf{x_5} \neq \mathbf{0}$

2.2.3 Sem produção de lotes e com avarias

Note-se que para esta instância do sistema como não existe produção de lotes, a variável de controlo b não existe, ou poder-se-á afirmar que existe mas em que o valor de b_{max} será 1.

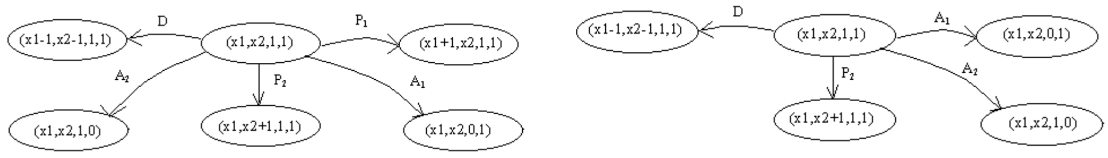

Figura 2.5: $(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ e $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$ (esquerda) ; $(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$ (direita)

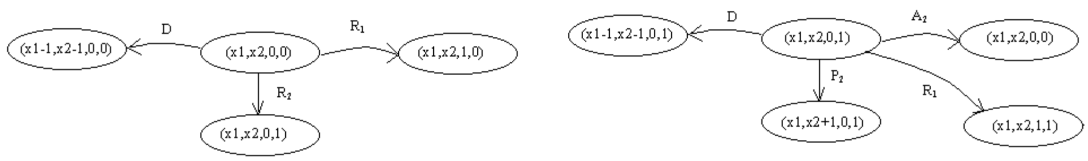

Figura 2.6: $(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 0})$ (esquerda) ; $(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 1})$ (direita)

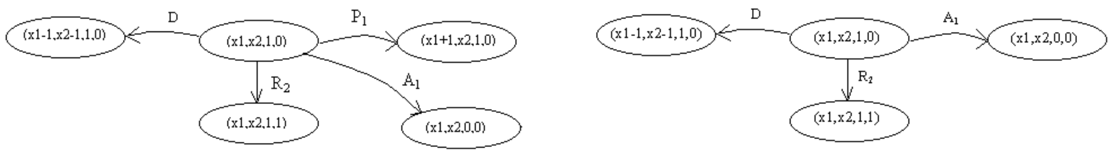

Figura 2.7: $(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ e $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$ (esquerda) ; $(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$ (direita)

2.2.4 Comparação dos diversos modelos para cada uma das instâncias do sistema

Nas tabelas 2.1 e 2.2 está representada a comparação dos modelos para as seguintes instâncias do sistema:

Tipo 1 - Sistema de duas máquinas em série com avarias e produção de lotes pela máquina 1.
Tipo 2 - Sistema de duas máquinas em série com avarias e sem produção de lotes.
Tipo 3 - Sistema de duas máquinas em série sem avarias e com produção de lotes pela máquina 1.
Tipo 4 - Sistema de duas máquinas em série sem avarias e sem produção de lotes.

Nas tabelas o valor 1 representa a região do espaço de estados referente à expressão $(x2 - x1) \neq 0$, e o valor 2 à região $(x1 - x1) = 0$. O valor 3 refere-se a qualquer valor das variáveis de estado (x_1, x_2, x_5). O valor $\nu_x(u)$ representa a taxa de transição total para uma dada região.

$\nu_1 = \lambda + \mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2 + \xi_1 + \xi_2$
$\nu_2 = \lambda + \mu_1 + \mu_2$
$\nu_x^1(u) = \lambda + \phi_1 + \phi_2 + u_1 + u_2$
$\nu_x^2(u) = \lambda + \phi_1 + \phi_2 + \mu_1 + u_2$
$\nu_x^3(u) = \lambda + \mu_1 + \phi_1 + \xi_2$
$\nu_x^4(u) = \lambda + u_2 + \phi_1 + \phi_2$
$\nu_x^5(u) = \lambda + u_2 + \phi_2 + \xi_1$

		(x_3, x_4)	Tr.	tipo 1	tipo 2	tipo 3	tipo 4
1	$x_5 = 0$	$(1,1)$	D^b	λ/ν_1	λ/ν_1	λ/ν_2	λ/ν_2
			P_1^b	u_1/ν_1	u_1/ν_1	u_1/ν_2	u_1/ν_2
			P_2^b	u_2/ν_1	u_2/ν_1	u_2/ν_2	u_2/ν_2
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	ϕ_1/ν_1	-	-
			A_2^b	ϕ_2/ν_1	ϕ_2/ν_1	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	-	-	-	-
			$\nu_x(u)$	$\nu_x^1(u)$	$\nu_x^1(u)$	$\lambda + u_1 + u_2$	$\lambda + u_1 + u_2$
		$(1,0)$	D^b	λ/ν_1	λ/ν_1	-	-
			P_1^b	u_1/ν_1	u_1/ν_1	-	-
			P_2^b	-	-	-	-
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	ϕ_1/ν_1	-	-
			A_2^b	-	-	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	ξ_2/ν_1	ξ_2/ν_1	-	-
			$\nu_x(u)$	$\lambda + \phi_1 + \xi_2$	$\lambda + \phi_1 + \xi_2$	-	-
	$x_5 \neq 0$	$(1,1)$	D^b	λ/ν_1	-	λ/ν_2	-
			P_1^b	μ_1/ν_1	-	μ_1/ν_2	-
			P_2^b	u_2/ν_1	-	u_2/ν_2	-
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	-	-	-
			A_2^b	ϕ_2/ν_1	-	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	-	-	-	-
			$\mu_x(u)$	$\nu_x^2(u)$	-	$\lambda + \mu_1 + u_2$	-
		$(1,0)$	D^b	λ/ν_1	-	-	-
			P_1^b	u_1/ν_1	-	-	-
			P_2^b	-	-	-	-
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	-	-	-
			A_2^b	-	-	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	ξ_2/ν_1	-	-	-
			$\nu_x(u)$	$\nu_x^3(u)$	-	-	-

Tabela 2.1: Tabela de comparação dos modelos para as várias instâncias do problema.

		(x_3, x_4)	Tr.	tipo 1	tipo 2	tipo 3	tipo 4
2	$x_5 = 0$	$(1,1)$	D^b	λ/ν_1	λ/ν_1	λ/ν_2	λ/ν_2
			P_1^b	-	-	-	-
			P_2^b	u_2/ν_1	u_2/ν_1	u_2/ν_2	u_2/ν_2
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	ϕ_1/ν_1	-	-
			A_2^b	ϕ_2/ν_1	ϕ_2/ν_1	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	-	-	-	-
			$\nu_x(u)$	$\nu_x^4(u)$	$\nu_x^4(u)$	$\lambda + u_2$	$\lambda + u_2$
		$(1,0)$	D^b	λ/ν_1	-	-	-
			P_1^b	-	-	-	-
			P_2^b	-	-	-	-
			A_1^b	ϕ_1/ν_1	-	-	-
			A_2^b	-	-	-	-
			R_1^b	-	-	-	-
			R_2^b	ξ_2/ν_1	-	-	-
			$\nu_x(u)$	$\lambda + \phi_1 + \xi_2$	-	-	-
3		$(0,1)$	D^b	λ/ν_1	λ/ν_1	-	-
			P_1^b	-	-	-	-
			P_2^b	u_2/ν_1	u_2/ν_1	-	-
			A_1^b	-	-	-	-
			A_2^b	ϕ_2/ν_1	ϕ_2/ν_1	-	-
			R_1^b	ξ_1/ν_1	ξ_1/ν_1	-	-
			R_2^b	-	-	-	-
			$\nu_x(u)$	$\nu_x^5(u)$	$\nu_x^5(u)$	-	-
		$(0,0)$	D^b	λ/ν_1	λ/ν_1	-	-
			P_1^b	-	-	-	-
			P_2^b	-	-	-	-
			A_1^b	-	-	-	-
			A_2^b	-	-	-	-
			R_1^b	ξ_1/ν_1	ξ_1/ν_1	-	-
			R_2^b	ξ_2/ν_1	ξ_2/ν_1	-	-
			$\nu_x(u)$	$\lambda + \xi_1 + \xi_2$	$\lambda + \xi_1 + \xi_2$	-	-

Tabela 2.2: Tabela de comparação dos modelos para as várias instâncias do problema.

Capítulo 3

Funções de custo elementar

Para se obter uma noção do desempenho de um sistema é necessário associar-lhe uma função de custo. Considerando um intervalo de tempo $[0, t]$ em que o sistema evolui, pode-se definir uma função para cada instante de tempo $g[x(t), u(t)]$, em que $x(t)$ representa o estado do sistema no instante de tempo t e $u(t)$ o controlo aplicado nesse instante. O custo total que o sistema vai incorrer nesse intervalo de tempo será dado pela seguinte expressão:

$$J = \int_0^t g[x(t), u(t)].dt \tag{3.1}$$

Define-se $g[x(t), u(t)]$ como sendo a taxa de custo, uma vez que mede o custo que o sistema incorre em cada instante temporal t. Ao longo deste relatório designar-se-á esta taxa de custo como ***função de custo elementar*** e que em situações de pouca ambiguidade apenas como função de custo. J define-se como sendo o custo total, uma vez que mede o custo que o sistema incorre durante um intervalo de tempo em que o sistema evolui.

Neste capítulo são descritas duas funções de custo elementar que podem ser utilizadas em problemas de controlo de inventário. Na seção 3.1 será apresentada a função de custo elementar que se denomina de função de custo clássica e na secção 2.2 apresenta-se uma nova função de custo elementar que se denomina de função de custo modificada, que se pode demonstrar englobar a função de custo clássica.

3.1 Função de custo elementar clássica

Para o sistema em estudo, o objectivo é manter um nível mínimo de inventário nos "buffers" e satisfazer a procura. Logo, pode-se definir uma função de custo que se representa na expressão 3.2 em que se penaliza com um peso h_2 o inventário no "buffer" intermédio, com um peso h_1 o inventário no "buffer" final e com um peso p_1 a incapacidade de satisfazer a procura, ou seja, penaliza um valor negativo do inventário no "buffer" final (backlog).

$$h_2.i_2 + h_1.i_1^+ + p_1.i_1^-, \tag{3.2}$$

em que $f^+ = \max(0, f)$ e $f^- = \max(0, -f)$. Esta função de custo aparentemente satisfaz todos os requesitos e por isso ela têm sido utilizada exaustivamente em problemas de controlo de inventário (ex. [3],[4]).

Normalmente arbitra-se as seguintes relações entre os vários parâmetros:

$$p_1 > h_1 > h_2, \tag{3.3}$$

significando que o custo de não satisfazer uma encomenda será maior que o custo do inventário em qualquer um dos "buffers" e que o custo do inventário intermédio é menor que o custo do inventário final.

Esta última hipótese não é sempre verdadeira. Por exemplo, nas fábricas de produtos enlatados o inventário intermédio tem um valor maior que o inventário final, porque os produtos intermédios têm uma grande probabilidade de se estragarem, ao contrário dos produtos finais.

A expressão 3.2 está escrita em termos das variáveis de inventário real (i_1, i_2). Pode-se reescrever esta expressão em termos das variáveis do inventário escalão (x_1, x_2) obtendo a seguinte expressão:

$$h_2.(x_2 - x_1) + h_1.x_1^+ + p_1.x_1^- \tag{3.4}$$

3.2 Função de custo elementar modificada

A criação de uma nova fução de custo para este problema de controlo de inventário deveu-se a uma série de questões que a função de custo clássica levanta e que são descritas em [8]. A principal razão advem de a função de custo elementar clássica ter um comportamento estranho para alguns valores das variáveis de estado. Esse comportamento é descrito na figura 3.1 que demonstra que a função de custo elementar clássica para certos valores das variáveis de estado penaliza mais fortemente situações em que o sistema está em melhor posição para recuperar de uma situação de "backlog" do que outras em que a recuperação é mais difícil.

Estado 1:
i_1 = -10 ; i_2=0
Custo $10 \times p_1$

Estado 2:
i_1=-10 ; i_2=1
Custo $10 \times p_1 + 1 \times h_2$

O custo do estado 1 é inferior ao custo do estado 2 o que não parece razoável dado que o estado 2 representa uma situação melhor para o sistema do que o estado 1.

Figura 3.1: Exemplo do comportamento da função de custo clássica.

Deve-se notar que este comportamento ocorre apenas ao nível da função de custo elementar. Isto é, ao calcular-se a função de custo total para um intervalo de tempo suficientemente grande, este comportamento irá dissipar-se na medida em que o custo "real" das duas situações irá emergir. O custo total associado ao estado 1 será menor que o custo do estado 2. Apesar disto, não deixa de ser estranho este comportamento da função de custo clássica. Devido a este comportamento os autores de [8] desenvolveram a seguinte função de custo elementar que se denomina função de custo elementar modificada:

$$h'_1.x_1^+ + p'_1.x_1^- + h'_2.x_2^+ + p'_2.x_2^- \tag{3.5}$$

Esta expressão corresponde a extender o raciocínio que foi utilizado para a função de custo clássica para um só "buffer". Na expressão da função de custo modificada, aplicamos este raciocínio às variáveis do inventário escalão, ou seja, para cada umas das variáveis do inventário escalão associa-se dois parâmetros para o seu valor positivo ou negativo.
Aplicando ao exemplo anterior esta função de custo elementar, obtém-se o resultado que está descrito na figura 3.2. Pode-se observar que esta função de custo diferencia mais correctamente as duas situações.

Estado 1: i_1 = -10 ; i_2=0 $\Rightarrow x_1 = -10$; $x_2 = -10$ Custo $10 \times p'_1 + 10 \times p'_2$ Estado 2: i_1=-10 ; i_2=1 $\Rightarrow x_1 = -10$; $x_2 = -9$ Custo $10 \times p'_1 + 9 \times p'_2$ O custo do estado 2 é inferior ao custo do estado 1.

Figura 3.2: Exemplo do comportamento da função de custo modificada.

De seguida demonstra-se que a função de custo elementar clássica corresponde a um sub-espaço do espaço da função de custo elementar modificada. Para qualquer função real a seguinte relação é verdadeira:

$$f = f^+ - f^- \tag{3.6}$$

Aplicando esta propriedade à expressão 3.4 obtemos:

$$\begin{aligned}
&h_2.(x_2 - x_1) + h_1.x_1^+ + p_1.x_1^- \\
&= h_2.[(x_2^+ - x_2^-) - (x_1^+ - x_1^-)] + h_1.x_1^+ + p_1.x_1^- \\
&= h_2.x_2^+ - h_2.x_2^- - h_2.x_1^+ + h_2.x_1^- + h_1.x_1^+ + p_1.x_1^- \\
&= (h_1 - h_2)x_1^+ + (h_2 + p_1)x_1^- + h_2.x_2^+ - h_2.x_2^-
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo, pode-se verificar-se que a função de custo clássica corresponde a utilizar a função de custo modificada com os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases}
h'_1 & = h_1 - h_2 \\
p'_1 & = h_2 + p_1 \\
h'_2 & = h_2 \\
p'_2 & = -h_2
\end{cases} \tag{3.8}$$

O que nos permite constatar que a função de custo clássica penaliza negativamente a soma dos inventários reais negativos.
O sistema de equações 3.8 corresponde à definição de um sub-espaço no espaço de parâmetros da função

de custo modificado. Na figura 3.3 está representada a forma desse sub-espaço. Como se tem um espaço de quatro dimensões na função de custo modificada, e o sub-espaço correspondente à função de custo clássica é de dimensão três, só estão representadas as duas variáveis que são restringidas pelo sistema de equações 3.8, ou seja, para uma instância da função de custo modificada estar na região da função de custo clássica, os parâmetros h'_2 e p'_2 têm de ser simétricos.

Nos restantes capítulos deste texto descreve-se os resultados obtidos com valores dos parâmetros na região da função de custo elementar clássica e fora dessa região, dentro do formalismo da função de custo elementar modificada. No Capítulo 7 compara-se o desempenho das funções de custo elementar modificada e clássica.

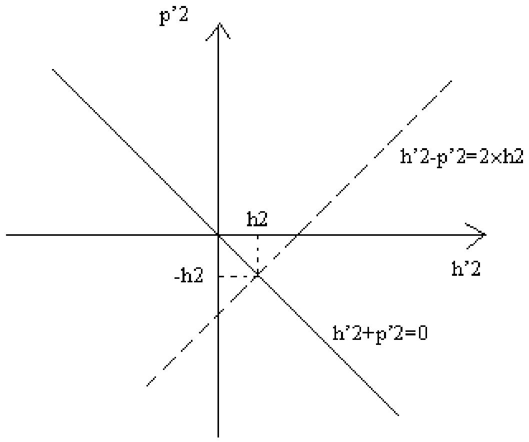

Figura 3.3: Sub-espaço da função de custo elementar modificada correspondente à função de custo clássica.

Capítulo 4

Cálculo da política de controlo óptimo

Agora que já foi definido um modelo para o sistema e a forma da função de custo elementar, pode apresentar-se o problema de controlo óptimo para este sistema. Na derivação do problema de controlo óptimo utiliza-se os resultados apresentados em [7] e [9] para problemas em tempo contínuo. Considerando um sistema com uma função de custo elementar associada $g(x(t), u(t))$, pode então definir-se o custo inerente ao sistema num horizonte temporal infinito pela seguinte expressão:

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-\beta t} g[x(t), u(t)] dt \tag{4.1}$$

Em que β representa um parâmetro de desconto positivo, e se $g[x(t), u(t)]$ for limitada superiormente e inferiormente permite garantir que o integral em 4.1 converge.

A cadeia de Markov anteriormente definida possui um conjunto discreto de estados possíveis. Seja I esse conjunto e $i \in I$ um desses estados. Se o sistema visitar o estado i ao fim de k transiçõe diz-se que $x_k = i$. Define-se uma política de controlo como o vector $\pi = (u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ em que para cada instante k onde $x_k = i$ existe um controlo associado definido por $u_k(i) \in U(I)$. No intervalo de tempo $]t_k, t_{k+1}[$, onde t_k é o instante da k-ésima transição e t_{k+1} é o instante de (k+1)-ésima transição, não existe transição de estado. Logo, como o estado não varia e o controlo é constante nesse instante o custo total inerente a utilizar a política π será dado pela expressão:

$$J_\pi(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (e^{-\beta t} g[x_k, u_k(x_k)] | x_0) dt \right\} \tag{4.2}$$

O custo total será afectado pela função de custo elementar e pela dinâmica do sistema. Essa dinâmica já foi modelada no Capítulo 2, mas de seguida discutem-se alguns aspectos importantes deste tipo de sistemas:

- Se o sistema está no estado i e o controlo aplicado é u, o próximo estado será j com probabilidade $p_{ij}(u)$.
- O intervalo de tempo τ entre transicões do estado i para o próximo estado é uma distribuição exponencial com parâmetro $\nu_i(u)$, ou seja, a função densidade de probabilidade de τ é dada pela seguinte expressão:

$$p(\tau) = \nu_i(u)e^{-\nu_i\tau}, \tau \geq 0 \tag{4.3}$$

O parâmetro $\nu_i(u)$ é definido como sendo taxa de transição associada ao estado i e ao controlo u. Os parâmetros $\nu_i(u)$ são limitados superiormente por ν tal que:

$$\nu_i(u) \leq \nu, \text{ para qualquer i}, u \in U(i) \tag{4.4}$$

No sistema em estudo a taxa de transição varia com o estado e o controlo, mas através do procedimento de uniformização aplicado à cadeia de Markov contínua que modela o sistema, obteve-se um modelo em que a taxa de transição é independente do estado e do controlo, e essa taxa tem um valor ν.
Pode-se verificar facilmente que este problema é essencialmente igual a um em que os tempos de transição são fixos. A razão intuitiva é que o controlo não pode influenciar o custo através dos tempos de transição. Logo a expressão 4.2 pode ser expressa como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\beta t}dt\right\} E\left\{g[x_k, u_k(x_k)]\right\}, \tag{4.5}$$

se $\beta > 0$ temos:

$$\begin{aligned} E\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\beta t}dt\right\} &= E\left\{\frac{e^{-\beta.t_k} - e^{-\beta.t_{k+1}}}{\beta}\right\} = E\left\{\frac{e^{-\beta.t_k} - e^{-\beta.(t_{k+1}+t_k-t_k)}}{\beta}\right\} = \\ &= E\left\{\frac{e^{-\beta.t_k} - e^{-\beta.\tau_k}.e^{-\beta.t_k}}{\beta}\right\} = \frac{E\left\{e^{-\beta.t_k}\right\}.(1 - E\left\{e^{-\beta.\tau_k}\right\})}{\beta} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sendo $\tau_k = t_{k+1} - t_k$.

No procedimento de uniformização do sistema definimos que $E\left\{t_{k+1} - t_k\right\} = \tau = \frac{1}{\nu}\ \forall\ k$, logo obtém-se:

$$E\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\beta t}dt\right\} = \frac{\alpha^k(1-\alpha)}{\beta}, \tag{4.7}$$

em que:

$$\alpha = E\left\{e^{-\beta\tau}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau}\nu e^{-\nu\tau}.d\tau = \frac{\nu}{\beta+\nu}. \tag{4.8}$$

Logo, para esta classe de sistemas, a equação de Bellman terá a seguinte forma:

$$J(i) = \frac{1}{\nu+\beta} \min_{u\in U(i)} \left\{g(i,u) + \nu\sum_j \widetilde{p}_{ij}(u)J(j)\right\}, \tag{4.9}$$

em que os $\widetilde{p}_{ij}$ correspondem às probabilidades de transição do estado i para o estado j uniformizadas. Substituindo os $\widetilde{p}_{ij}$ pela expressão de uniformização abaixo

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{cases} \frac{\nu_i(u)}{\nu} p_{ij} & \text{se } i \neq j, \\ 1 - \frac{\nu_i(u)}{\nu} p_{ij} & \text{se } i = j, \end{cases} \tag{4.10}$$

obtém-se finalmente a seguinte expressão para a equação de Bellman:

$$J(i) = \frac{1}{\nu + \beta} \min_{u \in U(i)} \left\{ g(i,u) + (\nu - \nu_i(u))J(i) + \nu_i(u) \sum_{j \neq i} p_{ij}(u) J(j) \right\}. \tag{4.11}$$

Nas secções seguintes calcula-se a equação de Bellman para as várias instâncias do problema definidas no Capítulo 2. Considera-se que a função de custo elementar $g(i,u)$ só depende das variáveis de estado (x_1, x_2) para qualquer dos sistemas em estudo.

4.1 Sem lotes e sem avarias

Nesta secção demonstra-se a obtenção da equação de Bellman para o problema de um sistema de duas máquinas em série sem avarias e sem produção de lotes pela máquina 1. Para este sistema tem que se diferenciar a situação em que não existe inventário no buffer intermédio $(x_2 - x_1 = 0)$ da situação em que existe $(x_2 - x_1 \neq 0)$, porque na situação em que não existe inventário intermédio, a máquina 1 não pode funcionar.

Vamos supor que u_1 e u_2 são as variáveis de controlo já definidas anteriormente, e que podem assumir os seguintes valores:

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1 & \text{a máquina 1 produz uma peça à taxa de produção } u_1 \in [0, \mu_1] \\ 0 & \text{a máquina 1 está parada} \end{cases} \tag{4.12}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} u_2 & \text{a máquina 2 produz uma peça à taxa de produção } u_2 \in [0, \mu_2] \\ 0 & \text{a máquina 2 está parada} \end{cases} \tag{4.13}$$

Tendo em conta a modelação deste sistema descrita no Capítulo 2, e os resultados obtidos no início deste capítulo obtém-se:

$\nu = \lambda + \mu_1 + \mu_2$
$\nu_a = \lambda + u_1 + u_2$
$\nu_b = \lambda + u_2$

$(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2) = & \frac{1}{\beta+\nu} \min_{(u_1,u_2)\in U} \{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_a).J(x_1,x_2) + \nu_a. \\
& .\left(\frac{\lambda}{\nu_a}.J(x_1-1,x_2-1) + \frac{u_1}{\nu_a}.J(x_1+1,x_2) + \frac{u_2}{\nu_a}.J(x_1,x_2+1)\right)\Bigg\} \\
= & \frac{1}{\beta+\nu} \min_{(u_1,u_2)\in U} \{g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2-u_1-u_2).J(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1)+ \\
& +u_1.J(x_1+1,x_2) + u_2.J(x_1,x_2+1)\} \\
= & \frac{1}{\beta+\nu}\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2).J(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1)\right] + \\
& + \frac{1}{\beta+\nu} \min_{(u_1,u_2)\in U} \{u_1.\left[J(x_1+1,x_2) - J(x_1,x_2)\right] + u_2.\left[J(x_1,x_2+1) - J(x_1,x_2)\right]\}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2) = & \frac{1}{\beta+\nu} \min_{(u_1,u_2)\in U} \left\{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_b).J(x_1,x_2) + \nu_b.\left(\frac{\lambda}{\nu_b}.J(x_1-1,x_2-1) + \frac{u_2}{\nu_b}.J(x_1,x_2+1)\right)\right\} \\
= & \frac{1}{\beta+\nu} \min_{(u_1,u_2)\in U} \{g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2-u_2).J(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1)+ \\
& +u_2.J(x_1,x_2+1)\} \\
= & \frac{1}{\beta+\nu}\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2).J(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1)\right] + \\
& + \frac{1}{\beta+\nu} \min_{u_2\in U} \{u_2.\left[J(x_1,x_2+1) - J(x_1,x_2)\right]\}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Observando as expressões finais da equação de Bellman, verifica-se que para cada uma das variáveis de controlo existe uma diferença na forma de $u_a.[J(x'_1,x'_2) - J(x_1,x_2)]$. Como o objectivo é minimizar esta expressão, verifica-se que a variável de controlo u_a só pode ter dois valores. Produzir a uma taxa máxima se $[J(x'_1,x'_2) - J(x_1,x_2)] < 0$ e não produzir se $[J(x'_1,x'_2) - J(x_1,x_2)] > 0$.
Pode-se concluir então que o controlo para este sistema será do tipo "bang-bang", ou seja, apesar de as variáveis de controlo poderem assumir valores dentro de um intervalo contínuo, elas só assumem dois valores: produzir à taxa máxima ou não produzir.
Este comportamento permite prever que no espaço de controlo irão existir regiões em que as máquinas estão a funcionar e outras em que estão paradas. Entre essas regiões existirá uma fronteira. No capítulo seguinte calcula-se a forma dessa fronteira.
Observando que os controlos só irão assumir dois valores para cada variável $u_1 \in 0, \mu_1$ e $u_2 \in 0, \mu_2$, se sequenciarmos as quatro hipóteses que a expressão de Bellman pode ter conforme o controlo escolhido para cada uma das variáveis, pode-se reescrever estas equações da seguinte forma:

$(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) \neq \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2) = & \frac{1}{\beta+\nu}\left[g(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1)\right] + \\
& + \frac{1}{\beta+\nu}\left[\mu_1.min\{J(x_1+1,x_2), J(x_1,x_2)\} + \mu_2.min\{J(x_1,x_2+1), J(x_1,x_2)\}\right]
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2) = & \frac{1}{\beta+\nu}\left[g(x_1,x_2) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1) + \mu_1.J(x_1.x_2)\right] + \\ & + \frac{1}{\beta+\nu}\left[\mu_2.min\left\{J(x_1,x_2+1),J(x_1,x_2)\right\}\right] \end{aligned} \tag{4.17}$$

Basta verificar se $J(x_1+1,x2) < J(x_1,x_2)$, para o controlo óptimo da máquina 1 no estado (x_1,x_2) ser produzir uma peça, caso contrário o controlo óptimo será ficar parada. O mesmo se aplica à máquina 2.

4.2 Sem lotes e com avarias

Nesta secção demonstra-se a obtenção da equação de Bellman para o problema de um sistema de duas máquinas em série com avarias e sem produção de lotes.
Tal como na secção anterior, será necessário diferenciar a situação em que não existe inventário no "buffer" intermédio da situação em que existe. Além disso, é necessário diferenciar as várias situações que os estados das máquinas podem apresentar.
Tendo em conta a modelação do sistema descrita no Capítulo 2 e os resultados obtidos no início deste capítulo obtemos:

$\nu = \lambda + \mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2 + \xi_1 + \xi_2$
$\nu_a = \lambda + \xi_1 + \xi_2$
$\nu_b = \lambda + u_2 + \phi_2 + \xi_1$
$\nu_c = \lambda + u_1 + u_2 + \phi_1 + \phi_2$
$\nu_d = \lambda + u_1 + \phi_1 + \xi_2$
$\nu_e = \lambda + u_2 + \phi_1 + \phi_2$
$\nu_f = \lambda + \phi_1 + \xi_2$

$(\mathbf{x_3} = \mathbf{0}, \mathbf{x_4} = \mathbf{0})$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,0,0) = & \frac{1}{\beta+\nu}.\min_{(u_1,u_2)\in U}\left\{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_a).J(x_1,x_2,0,0) + \nu_a.\left(\frac{\lambda}{\nu_a}.J(x_1-1,x_2-1,0,0) + \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\xi_1}{\nu_a}.J(x_1,x_2,1,0) + \frac{\xi_2}{\nu_a}.J(x_1,x_2,0,1)\right)\right\} \\ = & \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\nu_1+\nu_2+\phi_1+\phi_2).J(x_1,x_2,0,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,0,0) + \right. \\ & \left. + \xi_1.J(x_1,x_2,1,0) + \xi_2.J(x_1,x_2,0,1)\right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

$(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 1})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,0,1) =& \frac{1}{\beta+\nu}.\min_{u_2\in U}\left\{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_b).J(x_1,x_2,0,1) + \nu_b.\left(\frac{\lambda}{\nu_b}.J(x_1-1,x_2-1,0,1)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{u_2}{\nu_b}.J(x_1,x_2+1,0,1) + \frac{\phi_2}{\nu_b}.J(x_1,x_2,0,0) + \frac{\xi_1}{\nu_b}.J(x_1,x_2,1,1)\right)\right\}\\
=& \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\phi_1+\xi_2).J(x_1,x_2,0,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,0,1)+\right.\\
&\left.+\phi_2.J(x_1,x_2,0,0) + \xi_1.J(x_1,x_2,1,1)\right] +\\
&+\frac{1}{\beta+\nu}\min_{u_2\in U}\left\{u_2.[J(x_1,x_2+1,0,1) - J(x_1,x_2,0,1)]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,1) =& \frac{1}{\beta+\nu}.\min_{(u_1,u_2)\in U}\left\{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_c).J(x_1,x_2,1,1) + \nu_c.\left(\frac{\lambda}{\nu_c}.J(x_1-1,x_2-1,1,1)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{u_1}{\nu_c}.J(x_1+1,x_2,1,1) + \frac{u_2}{\nu_c}.J(x_1,x_2+1,1,1) + \frac{\phi_1}{\nu_c}.J(x_1,x_2,0,1) + \frac{\phi_2}{\nu_c}.J(x_1,x_2,1,0)\right)\right\}\\
=& \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\xi_1+\xi_1).J(x_1,x_2,1,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1)+\right.\\
&\left.+\ \phi_1.J(x_1,x_2,0,1) +\ \phi_2.J(x_1,x_2,1,0)\right] + \frac{1}{\beta+\nu}\min_{(u_1,u_2)\in U}\{\\
&u_1.[J(x_1+1,x_2,1,1) - J(x_1,x_2,1,1)] + u_2.[J(x_1,x_2+1,1,1) - J(x_1,x_2,1,1)]\}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,0) =& \frac{1}{\beta+\nu}.\min_{(u_1,u_2)\in U}\left\{g(x_1,x_2) + (\nu-\nu_d).J(x_1,x_2,1,0) + \nu_d.\left(\frac{\lambda}{\nu_d}.J(x_1-1,x_2-1,1,0)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{u_1}{\nu_d}.J(x_1+1,x_2,1,0) + \frac{\phi_1}{\nu_d}.J(x_1,x_2,0,0) + \frac{\xi_2}{\nu_d}.J(x_1,x_2,1,1)\right)\right\}\\
=& \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\phi_2+\xi_1).J(x_1,x_2,1,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0)+\right.\\
&\left.+\phi_1.J(x_1,x_2,0,0) + \xi_2.J(x_1,x_2,1,1)\right] +\\
&+\frac{1}{\beta+\nu}\min_{(u_1)\in U}\left\{u_1.[J(x_1+1,x_2,1,0) - J(x_1,x_2,1,0)]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$(\mathbf{x_2 - x_1) = 0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 1, 1) =& \frac{1}{\beta + \nu} . \min_{(u_1, u_2) \in U} \left\{ g(x_1, x_2) + (\nu - \nu_e) . J(x_1, x_2, 1, 1) + \nu_e . \left(\frac{\lambda}{\nu_e} . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 1, 1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{u_2}{\nu_e} . J(x_1, x_2 + 1, 1, 1) + \frac{\xi_1}{\nu_e} . J(x_1, x_2, 0, 1) + \frac{\xi_2}{\nu_e} . J(x_1, x_2, 1, 0) \right) \right\} \\
=& \frac{1}{\beta + \nu} . [g(x_1, x_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \xi_1 + \xi_2) . J(x_1, x_2, 1, 1) + \lambda . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 1, 1) + \\
& + \phi_1 . J(x_1, x_2, 0, 1) + \phi_2 . J(x_1, x_2, 1, 0)] + \\
& + \frac{1}{\beta + \nu} \min_{(u_2) \in U} \{ u_2 . [J(x_1, x_2 + 1, 1, 1) - J(x_1, x_2, 1, 1)] \}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

$(\mathbf{x_2 - x_1) = 0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 1, 0) =& \frac{1}{\beta + \nu} . \min_{(u_1, u_2) \in U} \left\{ g(x_1, x_2) + (\nu - \nu_f) . J(x_1, x_2, 1, 0) + \nu_f . \left(\frac{\lambda}{\nu_f} . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 1, 0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\phi_1}{\nu_f} . J(x_1, x_2, 0, 0) + \frac{\xi_2}{\nu_f} . J(x_1, x_2, 1, 1) \right) \right\} \\
=& \frac{1}{\beta + \nu} . [g(x_1, x_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \phi_2 + \xi_1) . J(x_1, x_2, 1, 0) + \lambda . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 1, 0) + \\
& + \phi_1 . J(x_1, x_2, 0, 0) + \xi_2 . J(x_1, x_2, 1, 1)]
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Estas equações podem ser reescritas na seguinte forma, separando as variáveis de controlo u_1 e u_2.

$(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 0})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 0, 0) =& \frac{1}{\beta + \nu} . [g(x_1, x_2) + (\mu_1 + \mu_2 + \phi_1 + \phi_2) . J(x_1, x_2, 0, 0) + \lambda . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 0, 0) + \\
& + \xi_1 . J(x_1, x_2, 1, 0) + \xi_2 . J(x_1, x_2, 0, 1)]
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Para este valor do vector de estado não existe decisão, e para o valor abaixo não existe decisão para a máquina 1.

$(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 1})$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 0, 1) =& \frac{1}{\beta + \nu} . [g(x_1, x_2) + (\mu_1 + \phi_1 + \xi_2) . J(x_1, x_2, 0, 1) + \lambda . J(x_1 - 1, x_2 - 1, 0, 1) + \\
& + \phi_2 . J(x_1, x_2, 0, 0) + \xi_1 . J(x_1, x_2, 1, 1)] + \\
& + \frac{\mu_2}{\beta + \nu} \min \{ J(x_1, x_2 + 1, 0, 1), J(x_1, x_2, 0, 1) \}
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,1,1) = & \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\xi_1+\xi_1).J(x_1,x_2,1,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1)+\right. \\ & +\phi_1.J(x_1,x_2,0,1) + \phi_2.J(x_1,x_2,1,0)] + \frac{1}{\beta+\nu}. \\ & .\left[\mu_1.min\left\{J(x_1+1,x_2,1,1), J(x_1,x_2,1,1)\right\}+\right. \\ & \left.+\mu_2.min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1), J(x_1,x_2,1,1)\right\}\right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,1,0) = & \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\phi_2+\xi_1).J(x_1,x_2,1,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0)+\right. \\ & +\phi_1.J(x_1,x_2,0,0) + \xi_2.J(x_1,x_2,1,1)] + \\ & + \frac{\mu_1}{\beta+\nu}min\left\{J(x_1+1,x_2,1,0), J(x_1,x_2,1,0)\right\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,1,1) = & \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\xi_1+\xi_2).J(x_1,x_2,1,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1)+\right. \\ & + \phi_1.J(x_1,x_2,0,1) + \phi_2.J(x_1,x_2,1,0)] + \\ & + \frac{\mu_2}{\beta+\nu}min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1), J(x_1,x_2,1,1)\right\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) = \mathbf{0}$ **e** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 0})$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,1,0) = & \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\phi_2+\xi_1).J(x_1,x_2,1,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0)+\right. \\ & +\phi_1.J(x_1,x_2,0,0) + \xi_2.J(x_1,x_2,1,1)] \end{aligned} \tag{4.29}$$

A interpretação destas equações é a mesma da secção anterior.

4.3 Com lotes e sem avarias

Nesta secção demonstra-se a obtenção da equação de Bellman para o problema de um sistema de duas máquinas em série sem avarias e com produção de lotes pela máquina 1.
Para este sistema o controlo terá a forma

$$u_1(x_1,x_2,x_5) = \begin{cases} u_1(b) & \text{a máquina 1 vai produzir b peças a uma taxa de produção } u_1 \in [0,\mu_1] \\ 0 & \text{a máquina 1 fica parada} \end{cases} \tag{4.30}$$

em que se juntou as variáveis de controlo u_1 e b numa só para facilitar os cálculos.

$$u_2(x_1,x_2,x_5)=\begin{cases} u_2 & \text{a máquina 2 vai produzir uma peça a uma taxa de produção } u_2\in[0,\mu_2] \\ 0 & \text{a máquina 2 fica parada} \end{cases} \tag{4.31}$$

Tendo em conta a modelação deste sistema descrita no Capítulo 2 e os resultados obtidos no início deste capítulo obtemos:

$\nu=\lambda+\mu_1+\mu_2$
$\nu_a=\lambda+u_1+u_2$
$\nu_b=\lambda+u_2$
$\nu_c=\lambda+\mu_1+u_2$

$(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1})\neq\mathbf{0}$ **e** $\mathbf{x_5}=\mathbf{0}$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,0)=&\frac{1}{\beta+\nu}\min_{(u_1(b),u_2)\in U}\{g(x_1,x_2)+(\nu-\nu_a).J(x_1,x_2,0)+\nu_a.\\ &.\left(\frac{\lambda}{\nu_a}.J(x_1-1,x_2-1,b)+\frac{u_1}{\nu_a}.J(x_1+b,x_2,0)+\frac{u_2}{\nu_a}.J(x_1,x_2+1,b)\right)\Big\}\\ =&\frac{1}{\beta+\nu}g(x_1,x_2)+\min_{(u_1(b),u_2)\in U}\{(\mu_1+\mu_2).J(x_1,x_2,0)+\lambda.J(x_1-1,x_2-1,b)+\\ &+u_1.[J(x_1+b,x_2,0)-J(x_1,x_2,0)]+u_2.[J(x_1,x_2+1,b)-J(x_1,x_2,0)]\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

$(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1})=\mathbf{0}$ **e** $\mathbf{x_5}=\mathbf{0}$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,0)=&\frac{1}{\beta+\nu}\min_{(u_1(b),u_2)\in U}\{g(x_1,x_2)+(\nu-\nu_a).J(x_1,x_2,0)+\nu_b.\\ &.\left(\frac{\lambda}{\nu_b}.J(x_1-1,x_2-1,b)+\frac{u_2}{\nu_b}.J(x_1,x_2+1,b)\right)\Big\}\\ =&\frac{1}{\beta+\nu}.g(x_1,x_2)+\min_{(u_1(b),u_2)\in U}\{(\mu_1+\mu_2).J(x_1,x_2,0)+\lambda.J(x_1-1,x_2-1,b)+\\ &+u_2.[J(x_1,x_2+1,b)-J(x_1,x_2,0)]\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

$\mathbf{x_5}\neq\mathbf{0}$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,x_5)=&\frac{1}{\beta+\nu}\min_{(u_1(b),u_2)\in U}\{g(x_1,x_2)+(\nu-\nu_c).J(x_1,x_2,x_5)+\nu_c.\\ &.\left(\frac{\lambda}{\nu_c}.J(x_1-1,x_2-1,x_5)+\frac{\mu_1}{\nu_x}.J(x_1+x_5,x_2,0)+\frac{u_2}{\nu_c}.J(x_1,x_2+1,x_5)\right)\Big\}\\ =&\frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2)+(\mu_2-u_2).J(x_1,x_2,x_5)+\lambda.J(x_1-1,x_2-1,x_5)+\right.\\ &\left.+\mu_1.J(x_1+x_5,x_2,0)\right]+\frac{1}{\beta+\nu}.\min_{u_2\in U}\{u_2.[J(x_1,x_2+1,x_5)-J(x_1,x_2,x_5)]\} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Nesta última equação, pode-se observar que se utilizou o valor μ_1 em relação ao custo $J(x_1+x_5,x_2,0)$ e não o valor u_1, como seria esperado. A utilização do valor μ_1 deve-se a que nesta região, o controlo para a máquina 1, já foi decidido num estado anterior, logo como já foi indicado neste capítulo que as políticas de controlo são do tipo "bang-bang", a taxa de produção para a máquina 1 decidida anteriormente teria de ser μ_1.

Estas equações não podem ser reescritas numa forma que permita separar as variáveis de controlo u_1 e u_2, e tal como para um sistema sem avarias e sem lotes, as políticas serão do tipo "bang-bang". Logo teremos a seguinte expressão final:

$\mathbf{(x_2 - x_1) \neq 0}$ **e** $\mathbf{x_5 = 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 0) = & \frac{1}{\beta + \nu}.g(x_1, x_2) + \frac{1}{\beta + \nu}.min\,\{ \\
& [\mu_1.J(x_1, x_2, 0) + \mu_2.min\,\{J(x_1, x_2, 0), J(x_1, x_2 + 1, 0)\} + \lambda.J(x_1 - 1, x_2 - 1, 0)] \;\;, b = 0 \\
& [\mu_1.J(x_1 + 1, x_2, 0) + \mu_2.min\,\{J(x_1, x_2, 0), J(x_1, x_2 + 1, 1)\} + \lambda.J(x_1 - 1, x_2 - 1, 1)] \;\;, b = 1 \\
& . \\
& . \\
& . \\
& [\mu_1.J(x_1 + b, x_2, 0) + \mu_2.min\,\{J(x_1, x_2, 0), J(x_1, x_2 + 1, b)\} + \lambda.J(x_1 - 1, x_2 - 1, b)]\}
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

até que $b = b_{max}$ ou $b = (x_2 - x_1)$.

$\mathbf{(x_2 - x_1) = 0}$ **e** $\mathbf{x_5 = 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, 0) = & \frac{1}{\beta + \nu}.\,[g(x_1, x_2) + \mu_1.J(x_1, x_2, 0) + \lambda.J(x_1 - 1, x_2 - 1, 0)] + \\
& + \frac{1}{\beta + \nu}.\mu_2.min\,\{J(x_1, x_2, 0), J(x_1, x_2 + 1, 0)\}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

$\mathbf{x_5 \neq 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1, x_2, x_5) = & \frac{1}{\beta + \nu}.\,[g(x_1, x_2) + \mu_1.J(x_1 + x_5, x_2, 0) + \lambda.J(x_1 - 1, x_2 - 1, x_5)] + \\
& \frac{\mu_2}{\beta + \nu}.min\,\{J(x_1, x_2, x_5), J(x_1, x_2 + 1, x_5)\}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

4.4 Com lotes e com avarias

Nesta secção demonstra-se a obtenção da equação de Bellman para o problema de um sistema de duas máquinas em série com avarias e com produção de lotes pela máquina 1.
A equação pode ser obtida pela conjugação dos modelos já apresentados para um sistema com avarias e para um sistema com produção de lotes. Tendo em conta a modelação do sistema descrita no Capítulo 2 e os resultados obtidos no início deste capítulo obtemos:

$(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 0})$

$$J(x_1,x_2,0,0,x_5) = \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\phi_1+\phi_2).J(x_1,x_2,0,0,x_5) + \right. \\ \left. +\lambda.J(x_1-1,x_2-1,0,0,x_5) + \xi_1.J(x_1,x_2,1,0,x_5) + \xi_2.J(x_1,x_2,0,1,x_5)\right] \tag{4.38}$$

$(\mathbf{x_3 = 0, x_4 = 1})$

$$J(x_1,x_2,0,1,x_5) = \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\phi_1+\xi_2).J(x_1,x_2,0,1,x_5) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,0,1,x_5) + \right. \\ \left. +\phi_2.J(x_1,x_2,0,0,x_5) + \xi_1.J(x_1,x_2,1,1,x_5)\right] + \\ + \frac{\mu_2}{\beta+\nu} min\left\{J(x_1,x_2+1,0,1,x_5), J(x_1,x_2,0,1,x_5)\right\} \tag{4.39}$$

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$ **e** $\mathbf{x_5 = 0}$

$$\begin{aligned} J(x_1,x_2,1,1,0) = &\frac{1}{\beta+\nu}.g(x_1,x_2) + \frac{1}{\beta+\nu}.min\{ \\ &[\mu_1.J(x_1,x_2,1,1,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,0) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,1,0) + \\ &\phi_2.J(x_1,x_2,1,0,0) + \mu_2.min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1,0), J(x_1,x_2,1,1,0)\right\}], b=0 \\ &[\mu_1.J(x_1,x_2,1,1,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,1) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,1,1) + \\ &\phi_2.J(x_1,x_2,1,0,1) + \mu_2.min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1,1), J(x_1,x_2,1,1,1)\right\}], b=1 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &[\mu_1.J(x_1,x_2,1,1,b) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,b) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,1,b) + \\ &\phi_2.J(x_1,x_2,1,0,b) + \mu_2.min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1,b), J(x_1,x_2,1,1,b)\right\}] \\ &\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

até que $b = b_{max}$ ou $b = (x_2 - x_1)$.

$(\mathbf{x_2 - x_1}) \neq \mathbf{0}$ **,** $(\mathbf{x_3 = 1, x_4 = 1})$ **e** $\mathbf{x_5 \neq 0}$

$$J(x_1,x_2,1,1,x_5) = \frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\xi_1+\xi_1).J(x_1,x_2,1,1,x_5) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,x_5) + \right. \\ \left. +\phi_1.J(x_1,x_2,0,1,x_5) + \phi_2.J(x_1,x_2,1,0,x_5) + \mu_1.J(x_1+x_5,x_2,1,1,0)\right] + \\ + \frac{\mu_2}{\beta+\nu}.min\left\{J(x_1,x_2+1,1,1,x_5), J(x_1,x_2,1,1,x_5)\right\} \tag{4.41}$$

$\mathbf{(x_2 - x_1) \neq 0 \ , \ (x_3 = 1, x_4 = 0) \ e \ x_5 = 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,0,0) = &\frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\phi_2+\xi_1).J(x_1,x_2,1,0,0)\right] + \frac{1}{\beta+\nu}.min\,\{\\
&[\mu_1.J(x_1,x_2,1,0,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0,0) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,0,0)+\\
&\xi_2.J(x_1,x_2,1,1,0)]\,, b=0\\
&[\mu_1.J(x_1,x_2,1,0,1) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,0) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,0,1)+\\
&\xi_2.J(x_1,x_2,1,1,1)]\,, b=1\\
&.\\
&.\\
&.\\
&[\mu_1.J(x_1,x_2,1,0,b) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0,b) + \phi_1.J(x_1,x_2,0,0,b)+\\
&\xi_2.J(x_1,x_2,1,1,b)]\\
&\}
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

$\mathbf{(x_2 - x_1) \neq 0 \ , \ (x_3 = 1, x_4 = 0) \ e \ x_5 \neq 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,0,x_5) = &\frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\phi_2+\xi_1).J(x_1,x_2,1,0,x_5) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0,x_5)+\right.\\
&\left.+\phi_1.J(x_1,x_2,0,0,x_5) + \xi_2.J(x_1,x_2,1,1,x_5) + \mu_1.J(x_1+x_5,x_2,1,0,0)\right]
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

$\mathbf{(x_2 - x_1) = 0 \ , \ (x_3 = 1, x_4 = 1) \ e \ x_5 = 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,1,0) = &\frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\xi_1+\xi_2).J(x_1,x_2,1,1,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,1,0)+\right.\\
&\left.+\ \phi_1.J(x_1,x_2,0,1,0) +\ \phi_2.J(x_1,x_2,1,0,0)\right] +\\
&+\ \frac{\mu_2}{\beta+\nu}min\,\{J(x_1,x_2+1,1,1,0), J(x_1,x_2,1,1,0)\}
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

$\mathbf{(x_2 - x_1) = 0 \ , \ (x_3 = 1, x_4 = 0) \ e \ x_5 = 0}$

$$
\begin{aligned}
J(x_1,x_2,1,0,0) = &\frac{1}{\beta+\nu}.\left[g(x_1,x_2) + (\mu_1+\mu_2+\phi_1+\phi_2).J(x_1,x_2,1,0,0) + \lambda.J(x_1-1,x_2-1,1,0,0)+\right.\\
&\left.+\phi_1.J(x_1,x_2,0,0,0) + \xi_2.J(x_1,x_2,1,1,0)\right]
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Capítulo 5

Resultados experimentais

Neste capítulo apresenta-se os resultados obtidos através do cálculo das políticas de controlo óptimo para este sistema, e para as suas instâncias mais simples. Apresenta-se também uma descrição breve dos algoritmos utilizados para obter as políticas de controlo óptimo.

Como foi descrito no Capítulo 4, o controlo deste sistema será do tipo "bang-bang", logo haverá uma fronteira a separar cada uma das regiões de funcionamento das máquinas. Na figura 5.1 estão representadas as curvas de controlo óptimo para um sistema de duas máquinas sem avarias e sem produção de lotes, em relação às variáveis do inventário escalão e do inventário real.

Designa-se estas curvas de controlo pelo nome de curvas de comutação ("switch curves").

Verifica-se que as políticas de controlo irão exibir uma topologia que permite dividir o espaço de estados em quatro regiões distintas: na região 0 ambas as máquinas estão paradas; na região 1 só a máquina 1 está a funcionar; na região 2 só a máquina 2 está a funcionar; e finalmente na região 3 ambas as máquinas estão a funcionar.

Pode-se observar, com esta topologia de controlo que o sistema irá evoluir para um ponto em que ambas máquinas estão paradas. A esse ponto corresponde um valor do inventário real ou escalão, que se designa como sendo o inventário ideal do sistema.

A procura será a perturbação que irá afastar o sistema desse ponto, obrigando-o a produzir peças, de maneira da evoluir na direção do inventário ideal.

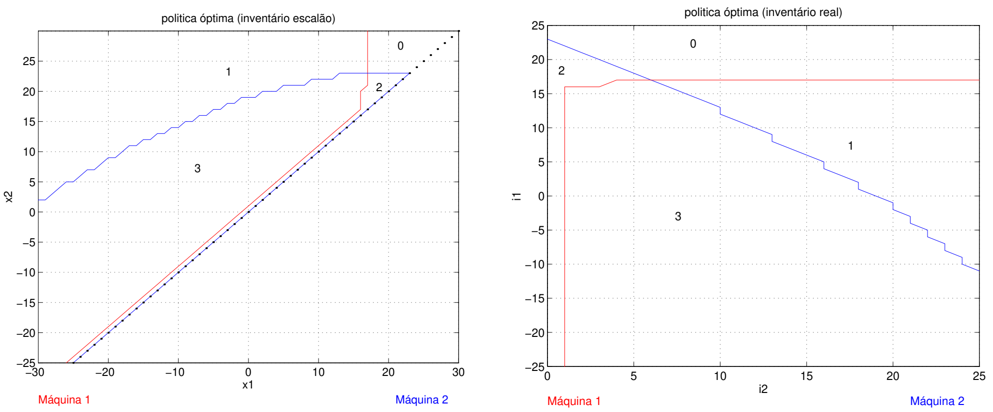

Figura 5.1: Curvas de comutação.

5.1 Algoritmos para o cálculo da política de controlo óptimo

Como se está na presença de um problema com um espaço de estados infinito e um horizonte temporal também infinito, para calcular a política de controlo óptimo para este sistema é necessário utilizar um método numérico que permita calcular o custo total de todos os estados e a respectiva política de controlo óptimo. Nesta secção apresentam-se dois algoritmos que foram utilizados para obter as políticas de controlo óptimo. O algoritmo de "value iteration", também conhecido por algoritmo de aproximações succesivas, e o algoritmo de "policy iteration". Estes algoritmos estão exaustivamente descritos em [7] e [9]. Definindo os operadores

$$T(J)(x) = \min E\{g(x,u) + \alpha J[f(x,u)]\}, \tag{5.1}$$
$$T_\mu(J)(x) = E\{g(x,\mu(x)) + \alpha J[f(x,\mu(x))]\}, \tag{5.2}$$

em que $T(J)$ é o custo óptimo para o problema a um passo com estado inicial x, função de custo elementar g e o custo terminal αJ, em que α é um parâmetro de desconto. Da mesma maneira, $T_\mu(J)$ é o custo correspondente à política de controlo μ para o mesmo problema. Escreve-se T^k como sendo a composição do operador T consigo próprio k vezes. Pode-se verificar que $T^k(J)(x)$ é o custo total óptimo para um problema a k passos. Em [9] é demonstrado que o operador T é um operador de contração, e por isso ao ser iterado irá convergir para um ponto fixo.

5.1.1 Value iteration

O algoritmo de "value iteration" baseia-se no seguinte resultado

$$\lim_{k\to\infty} (T^k J)(i) = J^*(i), \tag{5.3}$$

em que $J^*(i)$ representa o custo total óptimo para este sistema. Mas esta equação indica que para se obter o custo óptimo é necessário iterar um numero infinito de vezes o operador T. Felizmente existe também o resultado

$$(J^* - J_{\pi^*}) < \epsilon, \tag{5.4}$$

que indica que existe um intervalo de erro em que apesar do custo total obtido não ser óptimo, a política de controlo obtida (π^*) é óptima, o que implica que podemos atingir a política de controlo óptimo num número finito de iterações. O problema é saber qual o número de iteracões, para isso utiliza-se o seguinte resultado

$$T^k(J)(i) + \overline{c_k} \leq J^* \leq T^k(J)(i) + \underline{c_k}, \tag{5.5}$$

em que

$$\overline{c_k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.\min\left[T^k(J)(i) - T^{k-1}(J)(i)\right] \tag{5.6}$$

$$\underline{c_k} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.\max\left[T^k(J)(i) - T^{k-1}(J)(i)\right] \tag{5.7}$$

que fornece uma estimativa do erro associado ao custo total calculado numa dada iteração do algoritmo.

Normalmente o operador T ao ser aplicado a um determinado estado do espaço de estados vai utilizar valores do custo total associado a outros estados que foram calculados na iteração anterior. Para acelerar a convergência do algoritmo, pode-se utilizar uma variante do algoritmo conhecida como "value iteration" com Gauss-Seidel. Nesta variante os valores do custo total de cada estado utilizados pelo operador T são o valores da iteração actual. Em [9] demontra-se que esta variante também converge para a política de controlo óptimo, mas com um tempo de convergência mais rápido e uma menor necessidade de memória.

5.1.2 Policy iteration

No algoritmo de "Policy iteration", através da obtenção de políticas de controlo succesivamente melhores a partir de uma política de controlo inicial, obtém-se a política de controlo óptimo. O algoritmo terá a seguinte estrutura:

1. Inicialização: definir uma política de controlo inicial π^0.
2. Avaliação da política de controlo: dada a política de controlo π^k calcular o valor de $J(\pi^k)$.
3. Obtenção de uma nova política de controlo através do cálculo de uma nova política π^k tal que $T_{\pi^{k+1}}(J_{\pi^k}) = T(J_{\pi^k})$.
4. Se $J_{\pi^k} = T(J_{\pi^k})$, então o algoritmo encontrou a política de controlo óptimo. Se $J_{\pi^k} \neq T(J_{\pi^k})$, então o algoritmo volta ao ponto 2.

Pode-se observar que o algoritmo de "policy iteration" irá obter sempre a política de controlo óptimo. Este algoritmo é bastante mais lento que o algoritmo de "value iteration", também se pode verificar que o passo 2 do algoritmo pode ser resolvido através de "value iteration". Neste caso o algoritmo de "policy iteration" passa a denominar-se "modified policy iteration", e se utilizar-se a variante de Gauss-Seidel no passo 2 do algoritmo então estamos na presença do "modified policy iteration" com Gauss-Seidel.

5.2 Sem avarias e sem lotes

Nesta secção apresenta-se alguns resultados obtidos para um sistema sem avarias e sem produção de lotes. As curvas obtidas foram calculadas através do algoritmo de "modified policy iteration" com Gauss-Seidel, o que nos permite ter a certeza que as políticas obtidas são óptimas. Apresentam-se também curvas em que se utiliza parâmetros dentro da função de custo elementar clássico e parâmetros que já não lhe pertencem mas que estão dentro da função de custo elementar modificada. Uma análise detalhada das diferenças será feita no capítulo 7.

Na tabela 5.1 e na tabela 5.2 estão descritos os parâmetros de cada uma das curvas de controlo óptimo apresentadas. Deve-se observar que quando possível estão descritos os valores utilizados para as funções de custo elementar clássica e modificada de cada exemplo.
A primeira observação é que existe uma diferenca qualitativa entre as figuras em que os parâmetros da função de custo elementar pertencem à função de custo elementar clássica e os que não pertencem à função de custo elementar clássica. Dentro de cada uma destas classes, as curvas possuem a mesma estrutura qualitativa.

Pode-se observar que as curvas de comutação que correspondem a valores da função de custo elementar modificada, possuem uma estrutura que as aproxima de uma política de controlo denominada de "base stock", em relação ás variáveis do inventário escalão.

Exemplo	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	Figura
1	1	1	0.6	0.5	2.5	0.5	-0.5	5.2
2	1	1	0.9	0.5	2.5	0.5	-0.5	5.3
3	0.8	1	0.7	0.5	2.5	0.5	-0.5	5.4
4	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	5.5
5	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0.5	5.6

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados nos vários exemplos.

Exemplo	h_1	p_1	h_2	Figura
1	1	2	0.5	5.2
2	1	2	0.5	5.3
3	1	2	0.5	5.4
4	1	4	0.5	5.5
5	-	-	-	5.6

Tabela 5.2: Parâmetros utilizados nos vários exemplos.

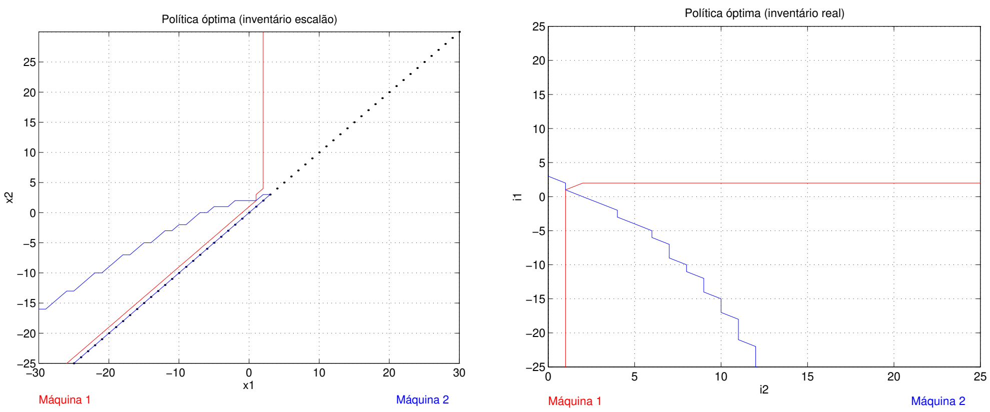

Figura 5.2: Curvas de comutação para o exemplo 1.

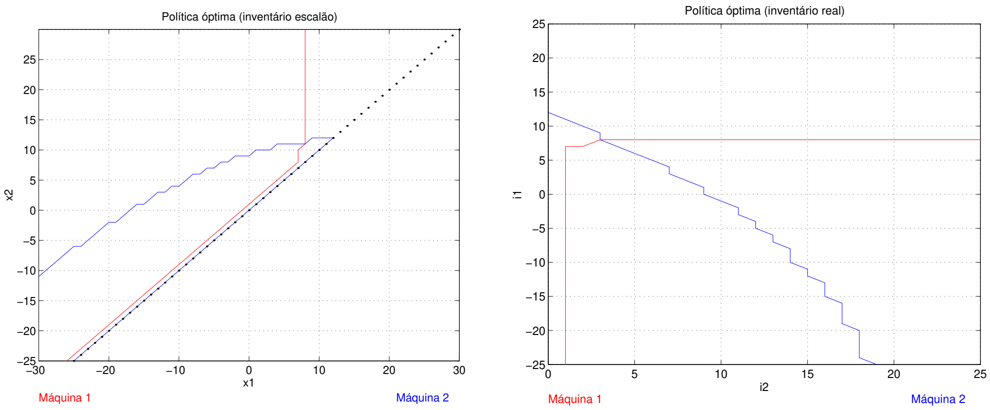

Figura 5.3: Curvas de comutação para o exemplo 2.

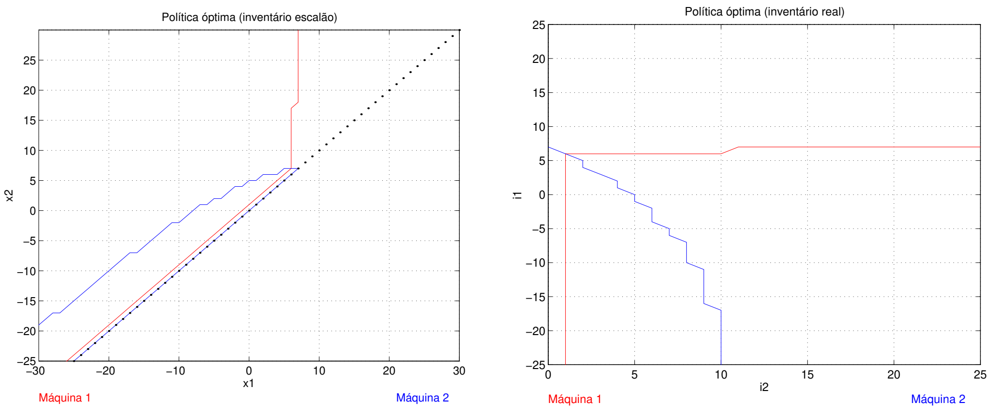

Figura 5.4: Curvas de comutação para o exemplo 3.

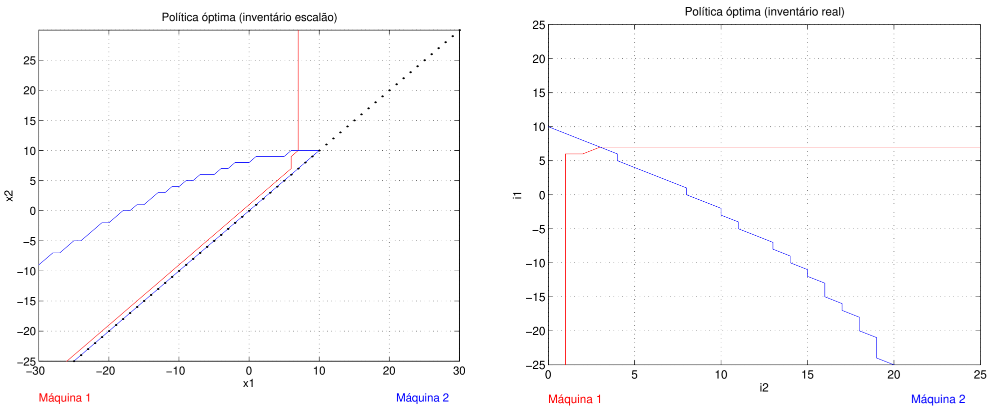

Figura 5.5: Curvas de comutação para o exemplo 4.

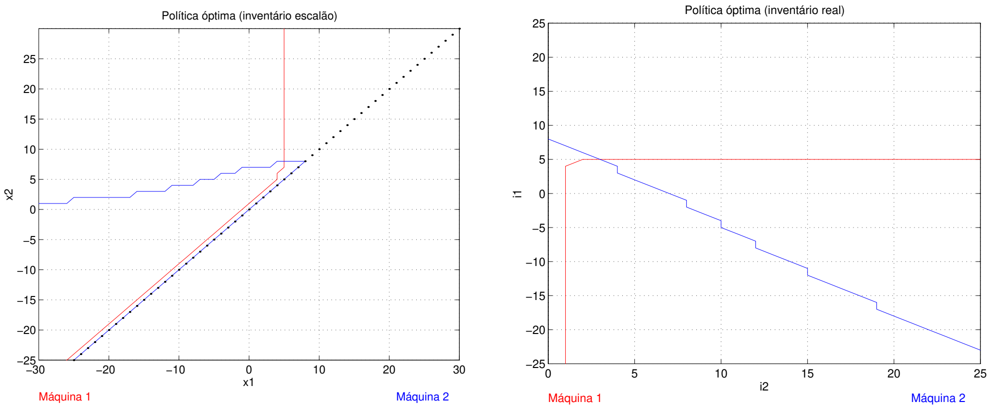

Figura 5.6: Curvas de comutação para o exemplo 5.

Uma política de "base stock" é definida como sendo uma política de controlo em que se o inventário é inferior a um determinado valor, então o sistema deve produzir até atingir esse valor. Note-se que o valor do inventário que deve ser atingido para cada um das variáveis é independente do estado do sistema (ver figura 6.1).

As curvas de comutação que correspondem a valores da função de custo elementar clássica, possuem uma estrutura que é bastante diferente de uma política de "base-stock". A razão para este comportamento, é que não existe razão para o sistema possuir um elevado valor de inventário intermédio quando está em "backlog", tanto que a capacidade de produção da máquina 1 é limitada. Tal implica que ela não poderá transformar todo esse inventário intermédio em inventário final, num intervalo de tempo reduzido.

No apêndice E apresenta-se a dependência das curvas de comutação com os vários parâmetros. Pode-se observar pelas figuras apresentadas nesse apêndice e pelas figuras apresentadas nesta secção, que um aumento da taxa de procura para o sistema, irá implicar um aumento dos níveis do inventário do sistema. Observa-se também que um aumento da taxa de produção da máquina 1, levará, como seria esperado, a uma diminuição do inventário das variáveis do inventário escalão x_1 e x_2.

Um aumento da taxa de produção da máquina 2, implica uma diminuição do nível de inventário da variável x_2.

Ao aumentar-se o parâmetro p_1 da função de custo elementar clássica, observa-se um aumento ligeiro do nível de inventário da variável x_1 e um aumento significativo da variável x_2. Este comportamento era esperado, porque ao penalizar-se mais fortemente situações de "backlog", leva-se o sistema a ter um maior inventário final, e a ter também um maior inventário intermédio, para diminuir a possibilidade da máquina 1 não ter peças para processar ("starved").

Um aumento do parâmetro h_2 da função de custo elementar clássica, leva a uma aumento ligeiro da variável x_1, e a uma diminuição da variável x_2. Este comportamento também era esperado, porque ao aumentarmos o custo do inventário intermédio, leva-se a que a política de controlo diminua o inventário intermédio, mas aumente ligeiramente o inventário final para compensar a possibilidade da máquina 1 não ter peças para processar.

Finalmente, aumentou-se o parâmetro p_2' na função de custo elementar modificada, observando-se que o inventário da variável x_1 se manteve praticamente constante, e o da variável x_2, variou significativamente. Um estudo mais detalhado da influência deste parâmetro será feito no capítulo 7.

5.3 Com avarias e sem lotes

Nesta secção apresenta-se alguns resultados obtidos para um sistema com avarias e sem produção de lotes. As curvas obtidas foram calculadas através do algoritmo de "value-iteration" com Gauss-Seidel. Como na secção anterior, apresentam-se curvas em que se utiliza parâmetros dentro da função de custo elementar clássica, e parâmetros que já não lhe pertencem, mas que estão dentro da função de custo elementar modificada.

Nas tabelas 5.3 e 5.4, estão descritos os parâmetros de cada uma das curvas de controlo óptimo apresentadas. Deve-se observar que quando possivel estão descritos os valores utilizados para as funções de custo elementar clássica e modificada.

Exemplo	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	Figura
1	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	5.7
2	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	5.8
3	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	5.9
4	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.5	5.10

Tabela 5.3: Parâmetros dos vários exemplos.

Exemplo	h_1	h_2	p_2	ϕ_1	ϕ_2	ξ_1	ξ_2	Figura
1	1	0.5	4	0.01	0.01	1	1	5.7
2	1	0.5	4	0.1	0.1	1	1	5.8
3	1	0.5	4	0.5	0.5	1	1	5.9
3	-	-	-	0.1	0.1	1	1	5.10

Tabela 5.4: Parâmetros dos vários exemplos.

Tal como para o sistema sem avarias e sem produção de lotes, existe uma diferença qualitativa entre as figuras em que os parâmetros da função de custo elementar pertencem á função clássica e os que não lhe pertencem.

Pode-se observar também que quando as máquinas estão avariadas, existe uma ligeira diminuição do inventário a atingir. Este comportamento é previsivel, porque se uma máquina está avariada, não existe necessidade de ter um inventário maior ou igual a quando ela está a funcionar, porque a máquina não o pode processar.

Na figura 5.9 estão representadas as curvas de comutação correspondentes a um sistema instável. Pode-se observar que as curvas atingem o valor máximo do espaço de estados, o que é compreensível, uma vez que é impossível satisfazer a procura.

Observa-se também que ao aumentar-se a taxa de avarias das máquinas, aumenta o nível de inventário da variável x_1 e x_2, o que era esperado, porque ao avariarem a uma taxa maior, é necessário ter um valor de inventário maior para compensar as avarias.

5.4 Sem avarias e com lotes

Nesta secção apresenta-se alguns resultados obtidos para um sistema sem avarias e com produção de lotes pela máquina 1. As curvas obtidas forma calculadas através do algoritmo de "value-iteration" com Gauss-Seidel. Como nas secções anteriores, apresentam-se curvas em que se utiliza parâmetros dentro

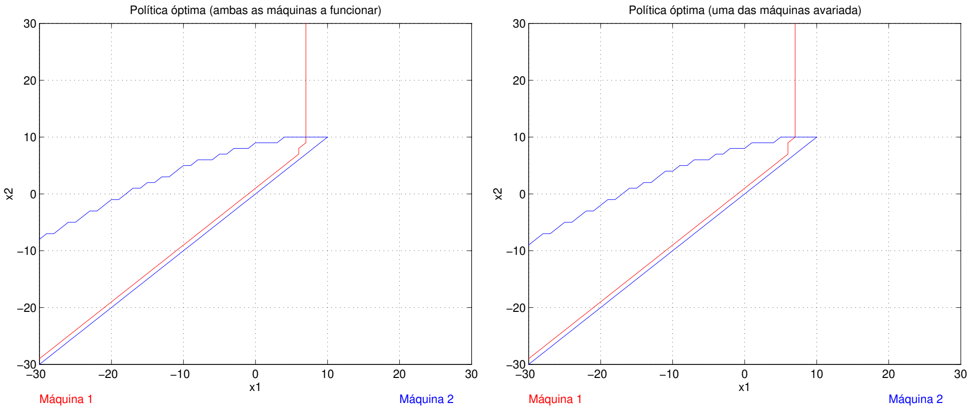

Figura 5.7: Curvas de comutação para o exemplo 1.

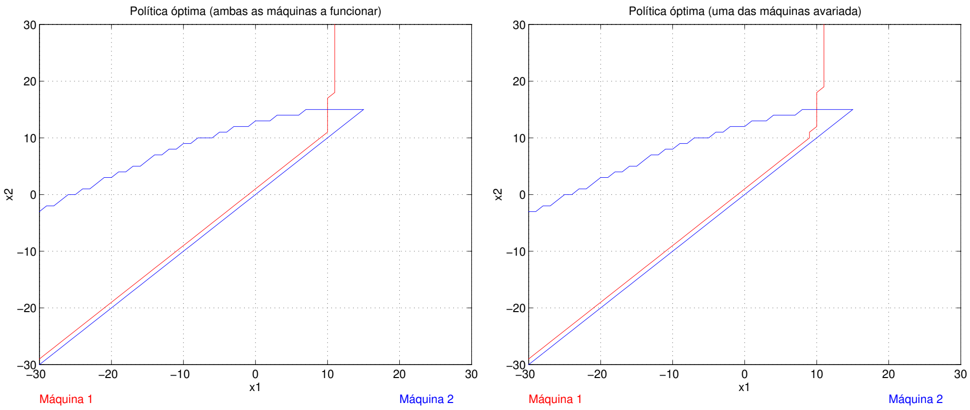

Figura 5.8: Curvas de comutação para o exemplo 2.

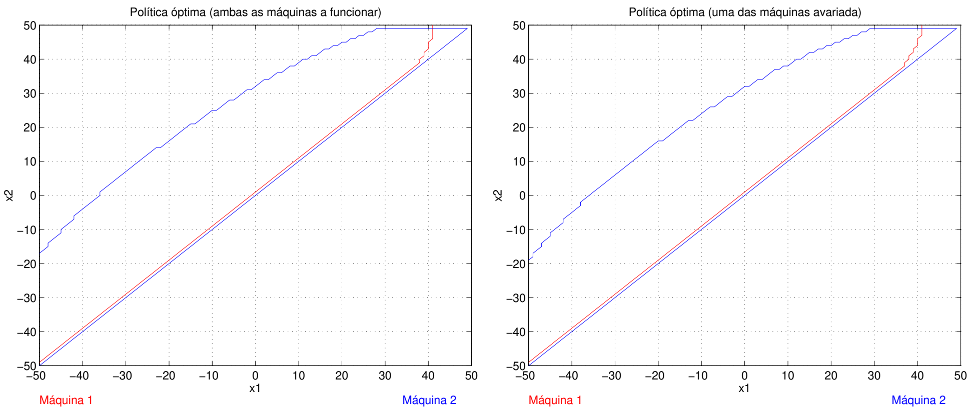

Figura 5.9: Curvas de comutação para o exemplo 3.

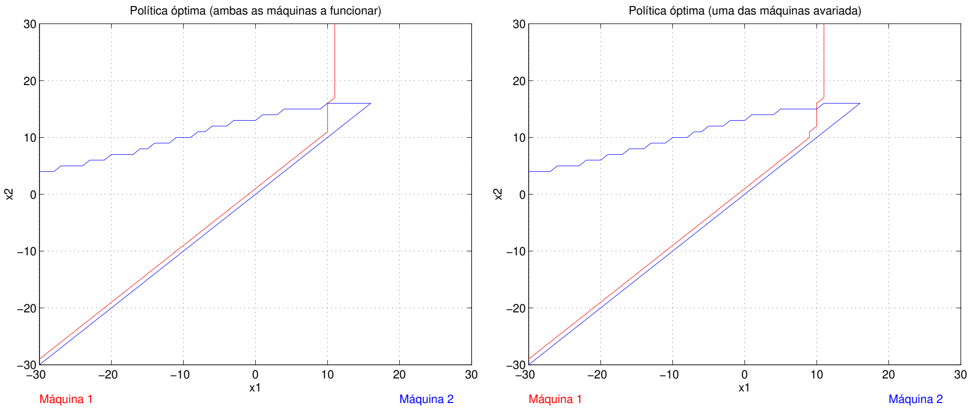

Figura 5.10: Curvas de comutação para o exemplo 4.

da função de custo elementar clássica, e parâmetros que já não lhe pertencem, mas que estão dentro da função de custo elementar modificada.

Nas tabelas 5.5 e 5.6, estão descritos os parâmetros de cada uma das curvas de controlo óptimo apresentadas.

Exemplo	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	b	Figura
1	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	3	5.11
2	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	1	5.12
3	0.4	1.2	1.0	0.5	2.5	0.5	-0.5	3	5.13
4	0.4	1.0	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	3	5.14
5	0.4	1.2	1.0	0.5	4.5	0.5	-0.5	3	5.15
6	0.4	1.2	1.0	0.5	4.5	0.5	0.5	3	5.16

Tabela 5.5: Parâmetros dos vários exemplos.

Exemplo	h_1	h_2	p_2	Figura
1	1	0.5	2	5.11
2	1	0.5	2	5.12
3	1	0.5	2	5.13
4	1	0.5	2	5.14
5	1	0.5	4	5.15
6	-	-	-	5.16

Tabela 5.6: Parâmetros dos vários exemplos.

A primeira observação que se pode fazer dos resultados obtidos, é que para qualquer um dos exemplos apresentados, o sistema irá sempre produzir o número máximo de peças disponíveis. Poder-se-ia esperar alguma relutância em iniciar lotes abaixo da capacidade máxima para evitar perda de capacidade. No entanto tal não acontece com é ilustrado nas figuras. Notar no entanto que produções que não esgotam a capacidade são raras devido à diferença de taxa de produção entre as duas máquinas. A sua ocorrência dá-se em situações em que o sistema está numa vizinhança muito próxima do inventário ideal.

Na figura 5.12, estão representados os resultados obtidos para um sistema que só pode produzir lotes de uma peça. Este exemplo serve para demonstrar a equivalência deste modelo em relação ao modelo para um sistema sem produção de lotes.

Um caso interessante está demonstrado na figura 5.11, que representa um sistema em que o "bottleneck", ou seja a máquina que determina a taxa de produção global do sistema (porque é a mais lenta), é a máquina 2. Neste caso estamos em presença de um sistema de uma máquina só, porque a máquina 1 têm uma taxa de produção superior à procura. Sabe-se que para este tipo de sistema, a política de controlo óptimo é "base-stock".

Uma outra observação importante, refere-se à não monotonicidade de certas políticas de controlo obtidas [6], como está representado na figura 5.15. Este resultado é de grande importância, porque é possivel demonstrar que para um sistema sem avarias e sem lotes (ou para um sistema com avarias e com lotes) modelado pelo denominado modelo I, as curvas de controlo são sempre monótonas (ver [6] para detalhes).

Note-se que a obtenção de curvas não monótonas, implica que haverá situações em que o controlo gera transições para o exterior da fronteira da região de controlo. Para um sistema monótono tal não é possível, dado que por definição nenhuma transição pode cruzar a fronteira.

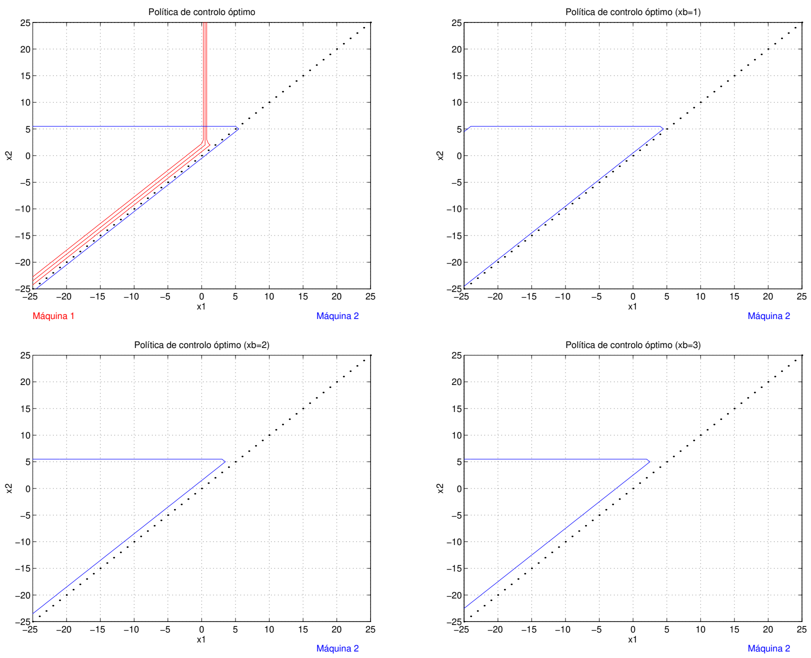

Figura 5.11: Curvas de comutação para o exemplo 1.

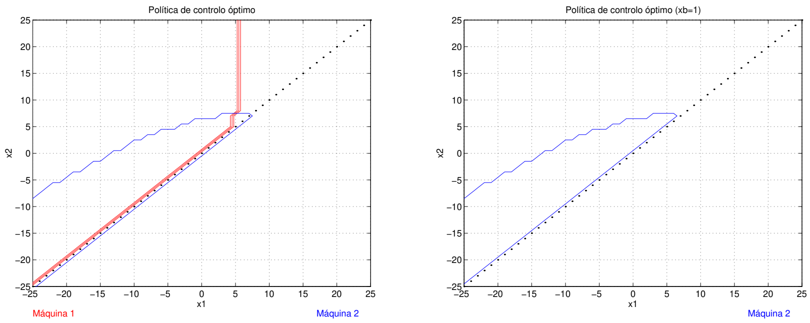

Figura 5.12: Curvas de comutação para o exemplo 2.

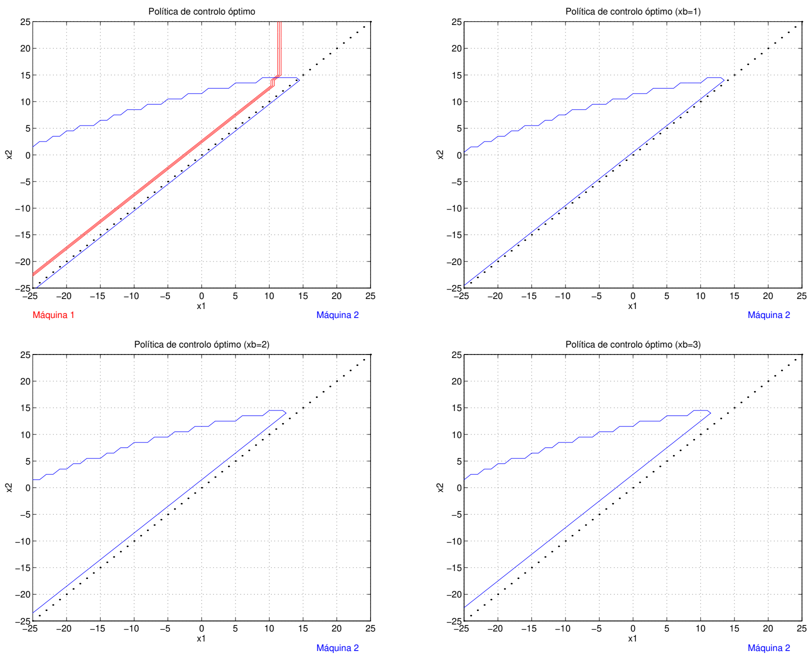

Figura 5.13: Curvas de comutação para o exemplo 3.

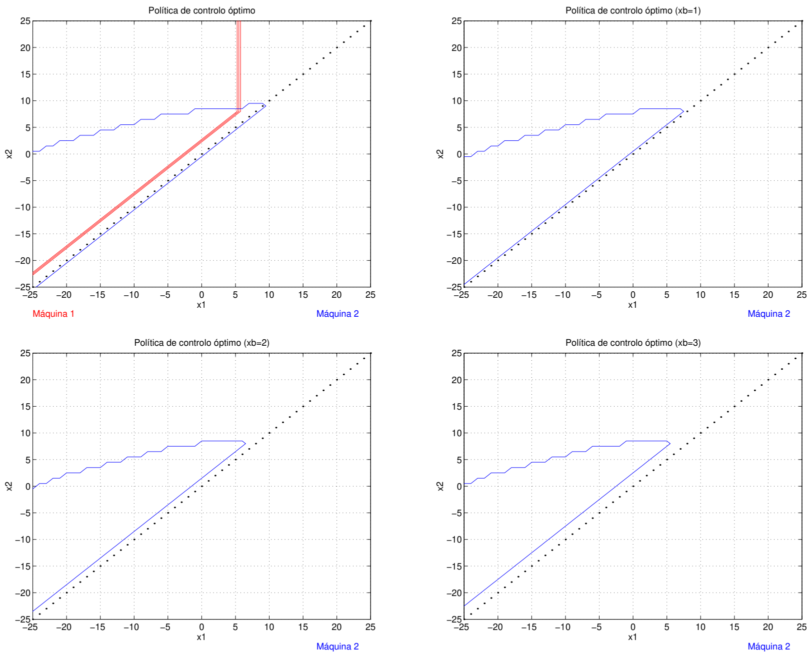

Figura 5.14: Curvas de comutação para o exemplo 4.

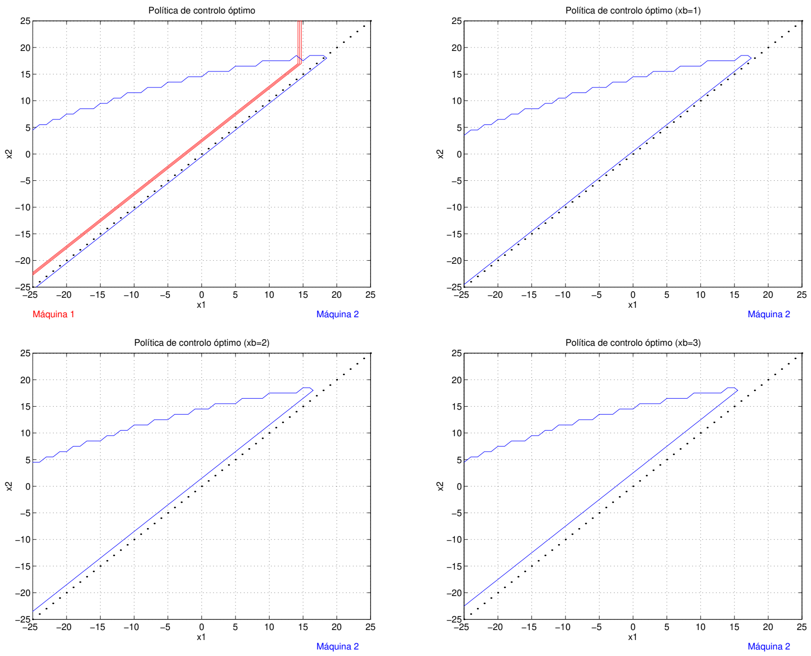

Figura 5.15: Curvas de comutação para o exemplo 5.

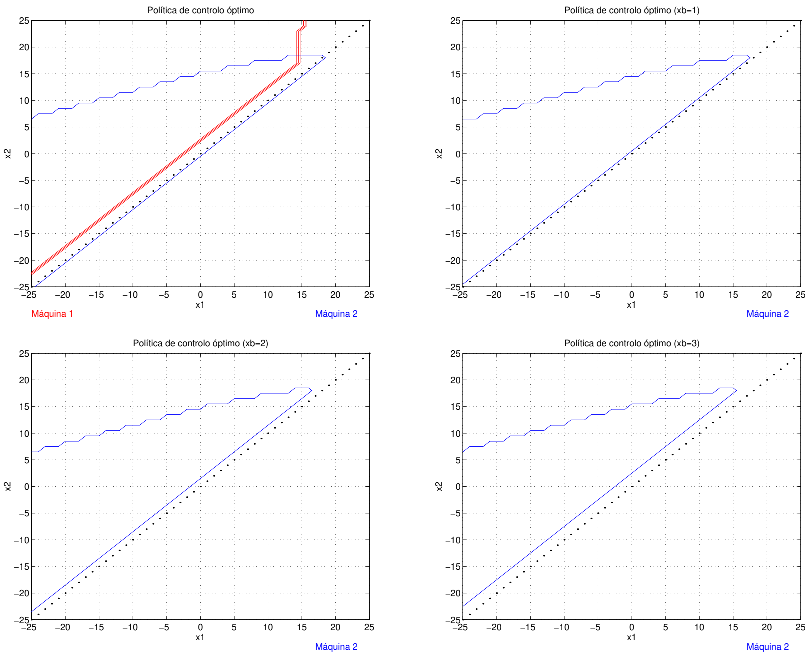

Figura 5.16: Curvas de comutação para o exemplo 6.

Capítulo 6

Simulação das políticas de controlo óptimo

Tendo definido o problema de controlo óptimo e procedido à sua resolução por métodos numéricos, poder-se-ia pensar que o estudo do sistema estava concluído uma vez que estamos a calcular as políticas de controlo óptimo. Logo, não teria lógica estarmos a comparar os desempenhos das várias políticas de controlo. Mas como se irá verificar no capítulo seguinte, em certas situações será necessário obter o desempenho do sistema na forma da distribuição do tempo de permanência do sistema em cada estado.

Para calcularmos esta distribuição procede-se à simulação do sistema com a política de controlo a estudar. Como se está a estudar um sistema em que as taxas de transição são exponenciais negativas, contando o número de vezes que o sistema se encontra num dado estado quando ocorre um evento de procura, obtém-se pela propriedade **P.A.S.T.A** (ver [10]) a percentagem de tempo que o sistema passa em média nesse estado.

Na figura 6.1 está representada uma política de controlo do tipo "base stock" em relação às variáveis do inventário escalão (x_1, x_2): se $x_1 \leq 5$ a máquina 1 deve produzir e se $x_1 > 5$ a máquina 1 deve estar parada; o mesmo se aplica à máquina 2, onde, se $x_2 \leq 8$ ela produz e se $x_2 > 8$ está parada.

Através da simulação desta política utilizando o programa **Simula** [5], obteve-se a distribuição do tempo de permanência do sistema em cada estado representada na figura 6.2. Nesta figura existe uma medida crucial para a avaliação do desempenho do sistema, que é dada pelo ponto em que a curva de distribuição do inventário final passa pelo zero. Este ponto representa a percentagem de tempo em que o sistema se encontra em "backlog". Defini-se como *nível de serviço* a percentagem de tempo em que o inventário final é não negativo. Esta percentagem mede a capacidade do sistema em satisfazer a procura no instante em que ocorre. É por isso uma medida de desempenho do sistema.

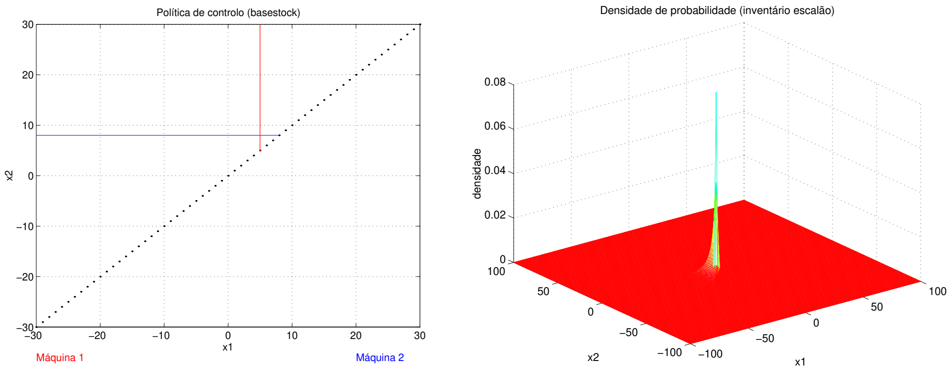

Figura 6.1: Curvas de comutação da política de controlo (direita) e densidade de probabilidade conjunta das variáveis (x_1, x_2) (esquerda).

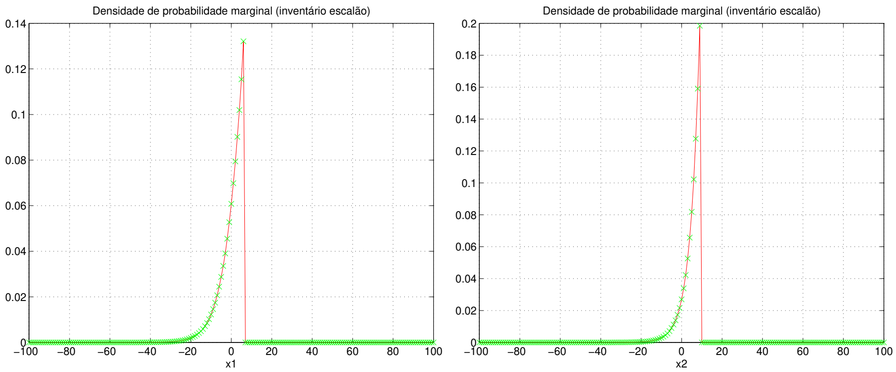

Figura 6.2: Densidades das probabilidades marginais.

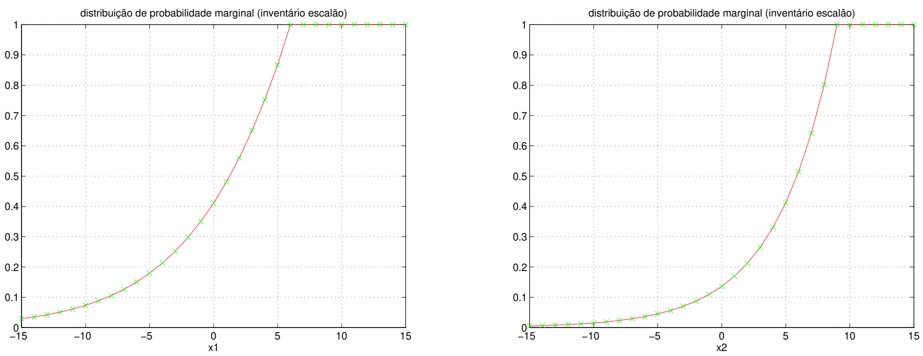

Figura 6.3: Distribuições das probabilidades marginais.

Capítulo 7

Comparação das funções de custo elementar clássica e modificada

O objectivo deste capítulo é apresentar uma análise das diferenças de desempenho entre um sistema que utiliza a função de custo elementar clássica para calcular o controlo óptimo e um sistema que utiliza a função de custo elementar modificada.

Em [8], é apresentada uma comparação das funções de custo elementar clássica e modificada para um sistema de duas máquina sem avarias e sem produção de lotes. Neste capítulo utiliza-se um raciocínio equivalente ao apresentado em [8], estendendo-se os resultados para um sistema com avarias.

O problema de comparar as funções de custo elementar clássica e modificada advém de, apesar de na realidade elas corresponderem a uma só função de custo como foi demonstrado no Capítulo 3, quando se calculam as políticas de controlo óptimo, é necessário instanciar os parâmetros da função de custo elementar. Logo no final obtém-se duas políticas de controlo óptimo para duas instâncias diferentes da função de custo elementar.

O objectivo da comparação da função de custo elementar clássica com a modificada deve-se a que a função de custo elementar clássica é um sub-espaço da função de custo elementar modificada, sendo necessário verificar se existe alguma vantagem em utilizar parâmetros para a função de custo elementar que estejam fora desse sub-espaço, ou seja, que não pertencem à função de custo elementar clássica.

Este objectivo coloca dois problemas: o primeiro refere-se a que medidas devem ser utilizadas para comparar o desempenho do sistema nas diversas instâncias dos parâmetros da função de custo elementar; o segundo problema reside em saber para uma dada instância dos parâmetros da função de custo elementar clássica, qual a instância ou instâncias dos parâmetros da função de custo elementar modificada, que devem ser utilizadas, no sentido de se obter uma conclusão relativa à vantagem de se utilizar esta por oposição à primeira.

Para resolver o primeiro, utilizou-se como medidas de comparação do desempenho do sistema, a distribuição de probabilidade do inventário escalão e o tempo médio de regeneração do sistema, ou seja o tempo que o sistema demora em média a chegar ao valor do inventário ideal.

A resolução do segundo problema é mais complicada. No apêndice A apresenta-se algumas das hipóteses que forma experimentadas para resolver este problema.

A solução acabou por ser aquela que mais se destaca na análise do sistema de equações 3.8 que representa os parâmetros que a função de custo elementar modificada deve ter para se encontrar na região da função de custo elementar clássica. No sistema de equações 3.8 observa-se que o ponto que nos merece mais atenção é o valor negativo com que se penaliza o inventário escalão x_2. Logo, a ideia seria tornar esse valor positivo o que nos levaria para fora da região clássica. Na figura 7.1 está representada a evolução do sistema para os parâmetros da tabela 7.1 em que se varia o parâmetro p'_2.

Nessa figura observa-se a principal razão porque é que se considera esta a maneira ideal de se comparar a função de custo elementar clássica com a modificada. Observa-se que o controlo da máquina 1 praticamente não muda, enquanto o controlo da máquina 2 varia de uma maneira substancial. Tal implica que qualquer melhoria na performance do sistema irá resultar de um melhor desempenho da máquina 2 e não da criação de um inventário final maior.

Deve-se agora observar os efeitos que esta variação de parâmetro p'_2 terá no desempenho do sistema, o que se irá verificar nas secções seguintes deste capítulo.

μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2
1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	[-0.5;0.5]

Tabela 7.1: Parâmetros da figura 7.1.

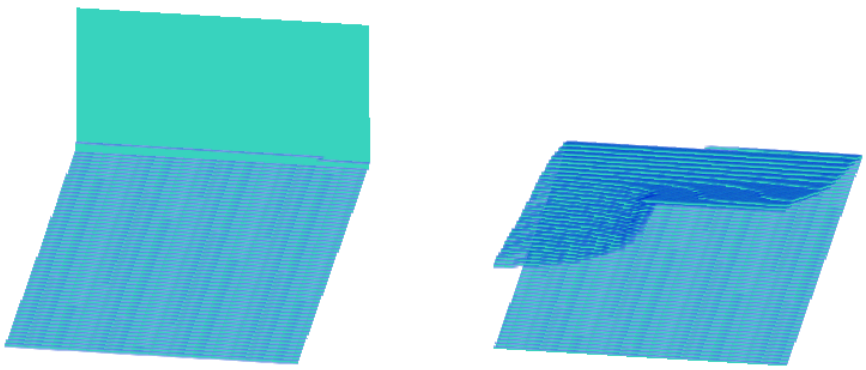

Figura 7.1: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro p'_2 (esquerda: máquina 1 ; direita: máquina 2, em que as curvas de comutação variam com o parâmetro p'_2 da esquerda para a direita).

7.1 Comparação das funções de custo para um sistema sem avarias e sem lotes

Na tabela 7.2 estão indicados os parâmetros de um conjunto de exemplos em que o parâmetro p'_2 foi variado desde o valor inicial negativo -0.5, que corresponde a uma instância da função de custo elementar clássica, até ao valor 0.5, que corresponde a uma instância da função de custo elementar modificada bastante "afastada" da função de custo elementar clássica.

Estão também descritos os valores médios do custo elementar durante a simulação das políticas de controlo, e os respectivos intervalos de confiança a 95%.

Nas figuras correspondentes pode-se observar a variação das curvas de comutação com o parâmetro p'_2. Verifica-se que o comportamento é equivalente ao já demonstrado na figura 7.1, ou seja, as curvas de comutação da máquina 2 irão "subir", aproximando-se de uma política de "base stock".

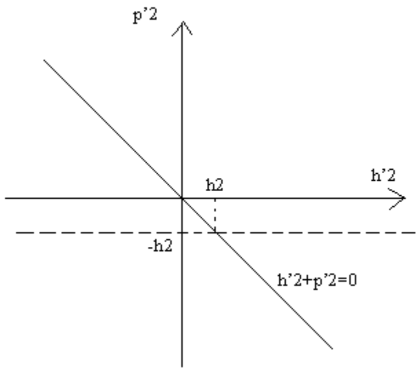

Figura 7.2: Descrição gráfica da evolução do parâmetro p_2' no espaço da função de custo elementar modificada.

ex.	μ_1	μ_2	λ	h_1'	p_1'	h_2'	p_2'	E(custo)	i.c. 95%
1	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	9.4382	0.0642
2	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.2	9.5949	0.0666
3	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0	9.7085	0.0684
4	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.2	9.7517	0.0682
5	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.5	9.7728	0.0679

Tabela 7.2: Parâmetros utilizados para cada exemplo.

ex.	tempo médio entre regenerações	intervalo de confiança a 95%	ponto de regeneração (x_1, x_2)
1	26.3147	0.117706	(6,8)
2	25.1439	0.109449	(6,8)
3	24.664	0.105885	(6,8)
4	33.5869	0.16531	(6,9)
5	17.6914	0.0764196	(6,9)

Tabela 7.3: Resultados do cálculo dos tempos médios de regeneração para cada exemplo.

Pode-se observar também a distribuição de probabilidade do inventário escalão para cada um dos exemplos. Verifica-se que para os estados em que o inventário final têm um valor negativo elevado, a probabilidade associada é extremamente pequena. Esta observação permite desmontar a seguinte objecção que poderia ser colocada à utilização da função de custo elementar modificada:

> No capítulo 2 foi indicado que não existe interesse em ter um inventário intermédio elevado, porque a máquina 1 não pode processar esse inventário intermédio rapidamente. Mas as curvas de comutação para valores de $p_2' > 0$ e numa situação em que a máquina 1 tém um valor negativo elevado do inventário final, a política óptima obtida indica que é necessário criar esse valor elevado de inventário intermédio. Mas a distribuição de probabilidade do inventário escalão, demonstra que essa situação tém uma probabilidade associada muito pequena.

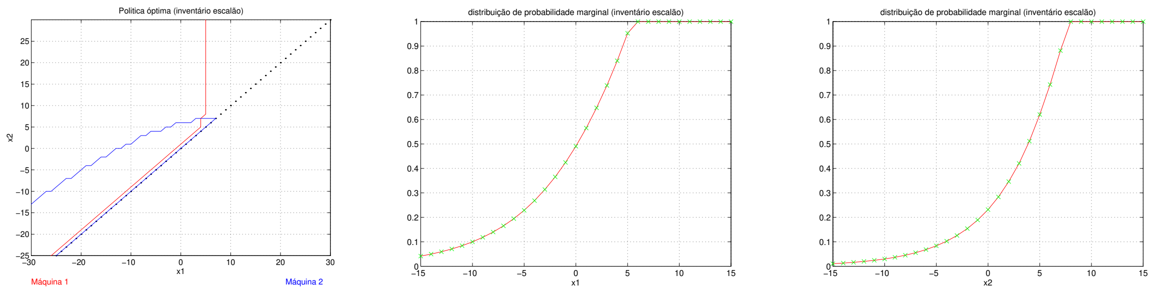

Figura 7.3: Exemplo 1.

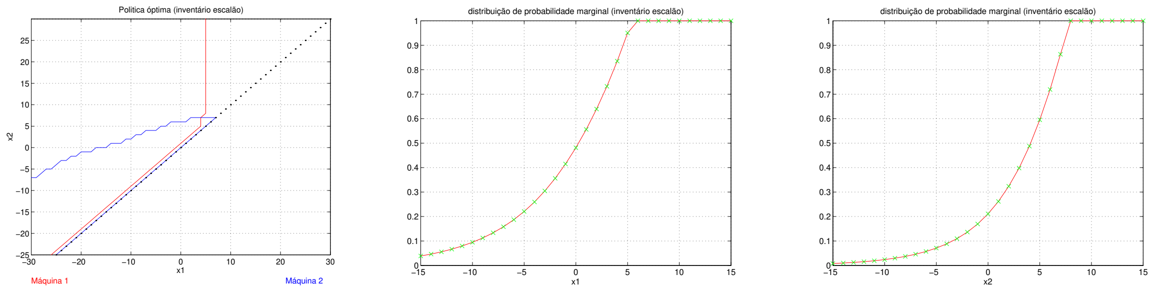

Figura 7.4: Exemplo 2.

Na figura 7.8 está representada a comparação das curvas de distribuição de probabilidade do inventário escalão para os vários exemplos. Pode-se observar que existe uma diminuição da probabilidade do sistema se encontrar em "backlog" com o aumento de p_2' (baixa 8 pontos percentuais para $p_2' = 0.5$ relativamente a $p_2' = -0.5$). É claro que essa melhoria é feita através do aumento do inventário intermédio, mas essse aumento é feito de uma maneira controlada.

Na tabela 7.3 estão representados os tempos médios de regeneração para cada exemplo, o intervalo de confiança a 95% para cada um dos valores obtidos e o ponto de regeneração para cada exemplo (inventário ideal).

Também aqui podemos observar uma melhoria da prestação do sistema, dado que o inventário ideal para a variável x_1 não varia e que para $p_2' = 0.5$ o sistema possui um desempenho superior a qualquer um

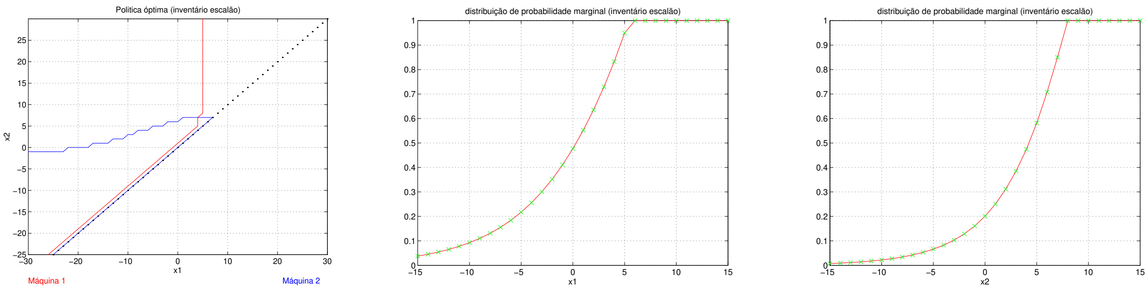

Figura 7.5: Exemplo 3.

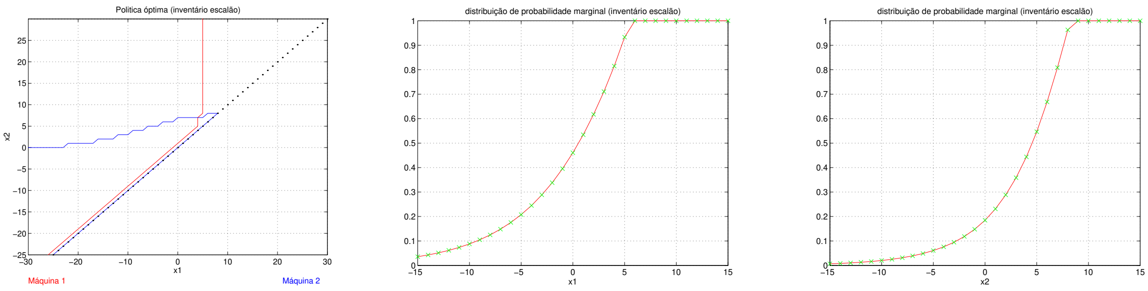

Figura 7.6: Exemplo 4.

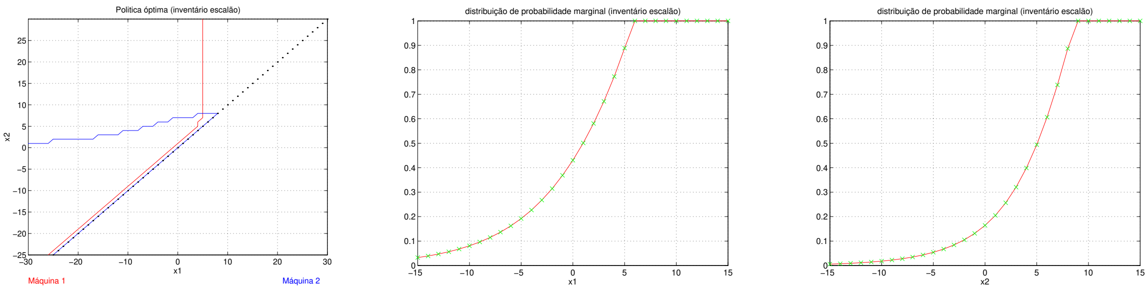

Figura 7.7: Exemplo 5.

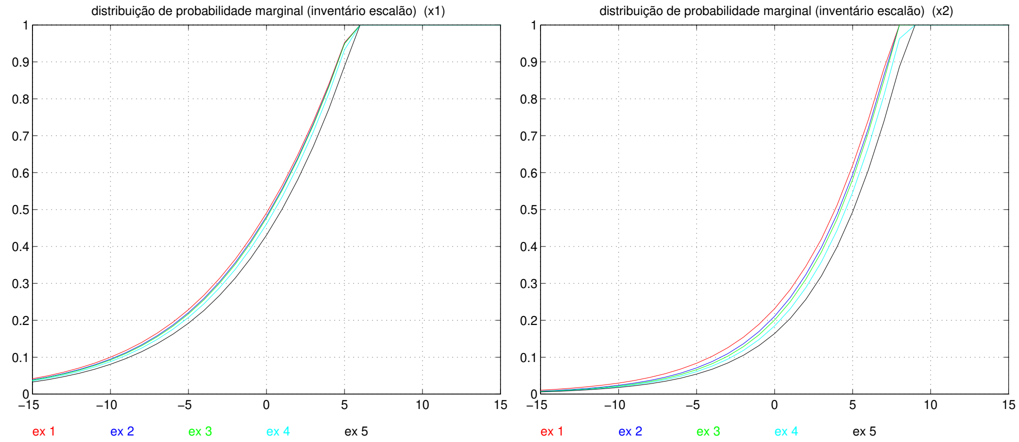

Figura 7.8: Comparação das distribuições de probabilidade dos vários exemplos.

dos outros exemplos. O caso $p_2' = 0.2$ é sintomático, uma vez que o aumento do tempo de regeneração se deve à variação do inventário ideal da variável x_2, como pode ser verificado no Apêndice C em que estão descritos outros dois exemplos.

7.2 Comparação das funções de custo para um sistema com avarias e sem lotes

Nesta secção, apresenta-se os resulados obtidos para o conjunto de exemplos da secção anterior, mas acrescentando a possibilidade das máquinas avariarem. Na tabela 7.4 estão indicados os parâmetros do conjunto de exemplos e os resultados obtidos na sua simulação.

As taxas de avarias e reparação utilizadas foram as seguintes: $\phi_1 = 0.01$; $\phi_2 = 0.01$; $\xi_1 = 1$; $\xi_2 = 1$. Pelas figuras correspondentes, pode-se observar que os resultados obtidos são equivalentes aos discutidos na secção anterior. Na figura 7.14, verifica-se que a probabilidade do sistema se encontrar em "backlog" é inferior à obtida na secção anterior.

Na tabela 7.5 estão representados os tempos médios de regeneração para cada exemplo. Verifica-se que o ganho obtido para o ponto $p_2' = 0.5$ é extremamente reduzido. Isto deve-se ao sistema mudar de ponto de regeneração para este valor de p_2', porque para os outros valores se verifica uma diminuição razoável do tempo médio de regeneração.

ex.	μ_1	μ_2	λ	h_1'	p_1'	h_2'	p_2'	E(custo)	i.c. 95%
1	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	13.6133	0.1217
2	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.2	13.7813	0.1042
3	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0	13.8063	0.0998
4	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.2	14.0026	0.1023
5	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.5	14.0382	0.1311

Tabela 7.4: Parâmetros utilizados para cada exemplo.

ex.	tempo médio entre regenerações	intervalo de confiança a 95%	ponto de regeneração (x_1, x_2)
1	25.4283	0.1598	(7,10)
2	23.1386	0.1570	(7,10)
3	22.5723	0.1384	(7,10)
4	22.3490	0.1529	(7,10)
5	24.6783	0.1431	(7,11)

Tabela 7.5: Resultados do cálculo dos tempos médios de regeneração para cada exemplo.

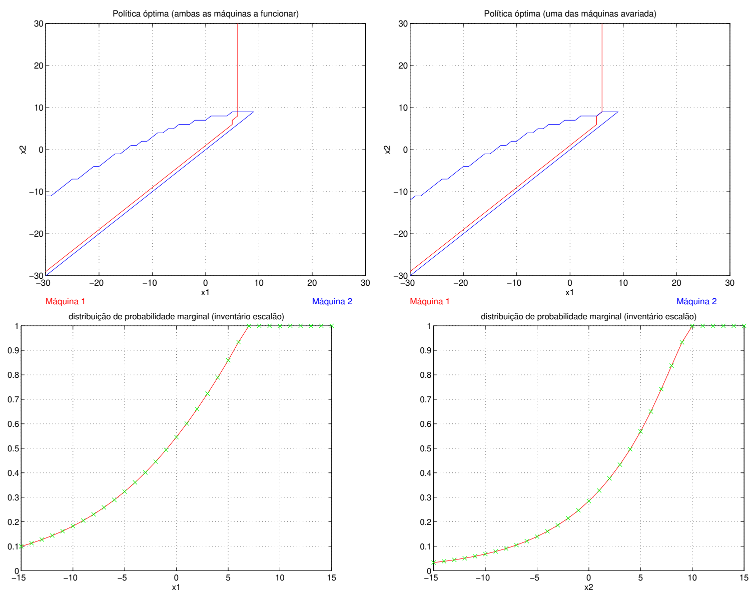

Figura 7.9: Exemplo 1.

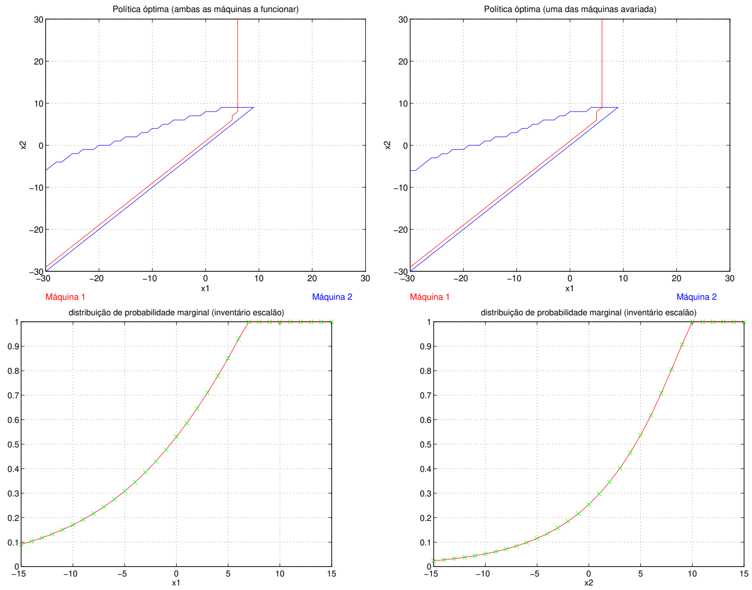

Figura 7.10: Exemplo 2.

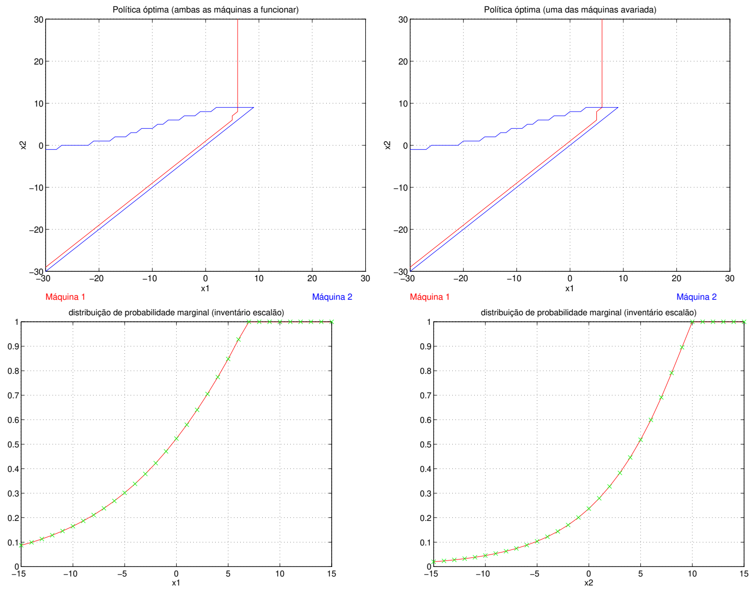

Figura 7.11: Exemplo 3.

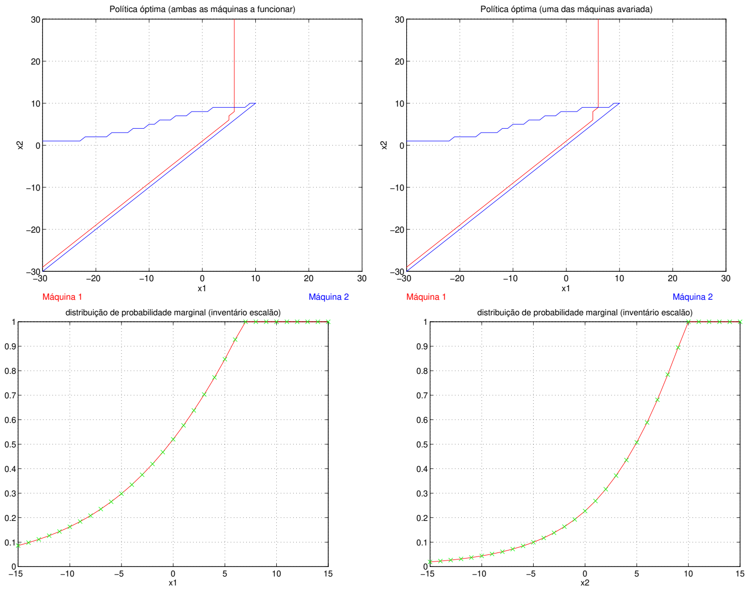

Figura 7.12: Exemplo 4.

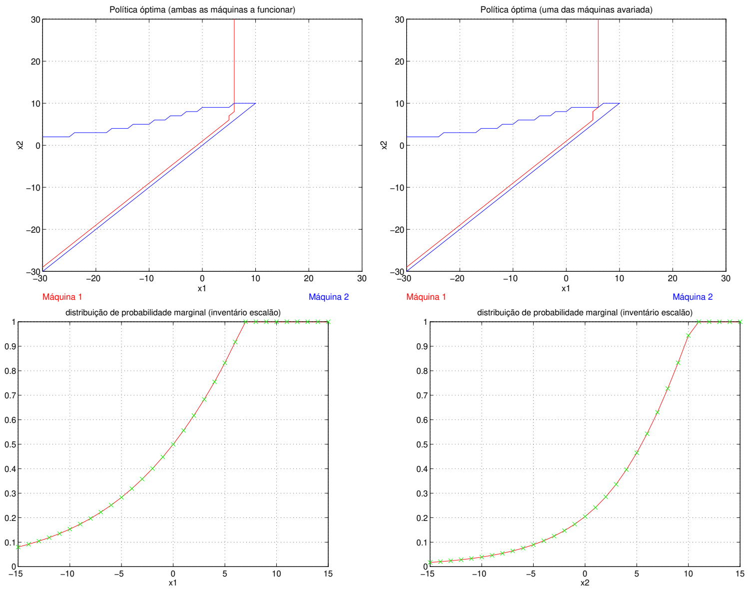

Figura 7.13: Exemplo 5.

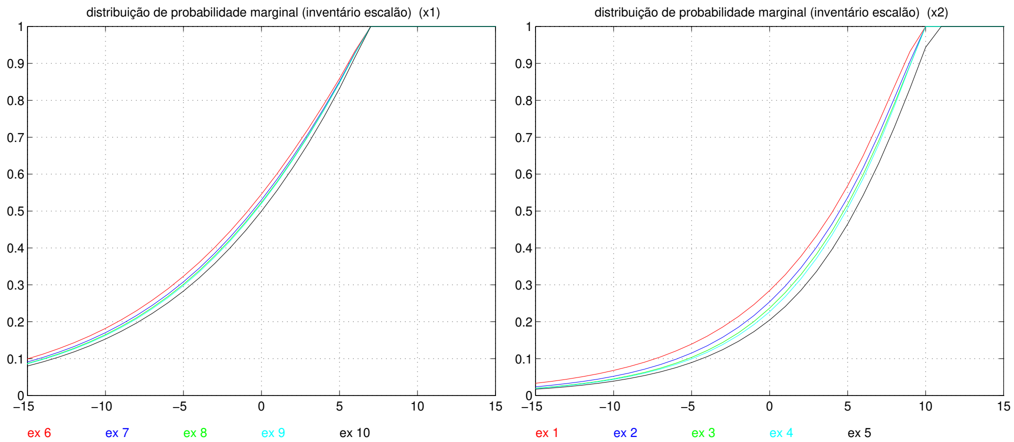

Figura 7.14: Comparação das distribuições de probabilidade dos vários exemplos.

Capítulo 8

Conclusões

No final deste relatório, pode-se afirmar que a maior parte dos objectivos foram alcançados. Apresentou-se um modelo para um sistema com avarias e com produção de lotes pela máquina 1; e calcularam-se as políticas de controlo óptimo para as instâncias deste sistema em que não existe avarias ou produção de lotes, para quando existem avarias e para quando existe produção de lotes. O objectivo de calcular a política de controlo óptimo para um sistema com avarias e com produção de lotes, só foi alcançado para o denominado modelo I.

Observou-se que as políticas de controlo obtidas são do tipo "bang-bang", e verificou-se também que para um sistema com lotes, modelado pelo denominado modelo II, as políticas de controlo podem não ser monótonas (ao contrário de um sistema sem lotes, ou de um sistema com lotes modelado pelo denominado modelo I, em que as políticas de controlo são sempre monótonas).

Paralelamente a este trabalho foi estudada uma nova função de custo elementar, denominada de função de custo elementar modificada, que permitiu obter um melhor desempenho do sistema em relação à função de custo elementar utilizada normalmente para este tipo de sistema.

Verificou-se também que as políticas de controlo baseadas nesta nova função de custo elementar possuem uma estrutura que as torna bastante próximas de uma política de controlo do tipo "base stock" em termos das variáveis do inventário escalão.

Existem várias direcções de interesse para estender os resultados apresentados neste relatório. Pode-se destacar as seguintes:

- Estender a comparação das funções de custo elementar clássica e modificada para o problema de um sistema com produção de lotes e para um sistema com mais de duas máquinas.

- Comparar o desempenho dos sistemas modelados pelo modelo I e II.

- Utilizar modelos mais complexos para as distribuições dos tempos de produção e de chegada da procura.

- Comparar o desempenho entre políticas de controlo baseadas na função de custo elementar modificada e políticas de controlo sub-óptimo do tipo "base stock".

Apêndice A

Hipóteses de comparação das funções de custo elementar

Neste apêndice apresenta-se algumas das hipóteses que foram testadas para descobrir qual a melhor maneira de comparar a função de custo elementar clássica com a modificada. O objectivo é descobrir a melhor maneira de passar da região correspondente à função de custo clássica para fora dela, dentro da função de custo elementar modificada. Ou seja, descobrir qual a região da função de custo elementar modificada que melhor corresponde a um ponto da função de custo elementar clássica.

A.1 Raciocínio geométrico

Nesta hipótese, através da observação da figura 3.3, utilizou-se um critério da menor distância geométrica para descobrir qual a região na função de custo elementar modificada que corresponde a um ponto na clássica. Pela figura 3.3 verifica-se que essa região corresponde à equação da recta $h_2' - p_2' = 2 \times h_2$ onde h_2 corresponde ao ponto da função de custo elementar clássica que se vai estudar. Na figura A.1 observa-se a evolução das curvas de comutação para um sistema sem avarias e sem produção de lotes, quando se passa da região clássica para fora dela utilizando a equação anterior.

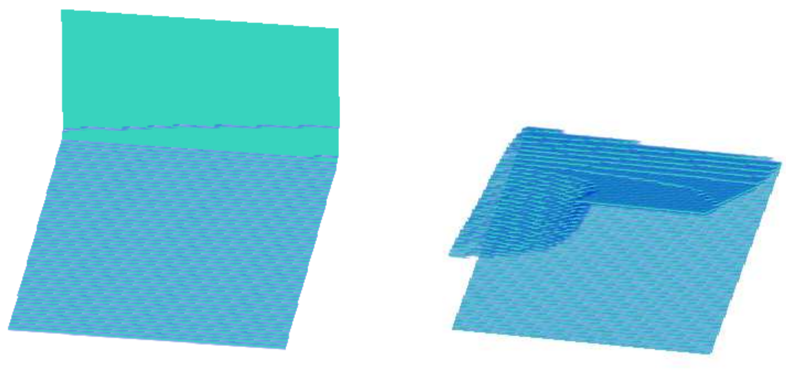

Figura A.1: Evolução das curvas de comutação.

Pode-se observar que existe uma pequena variação nas curvas de comutação da máquina 1, mas é nas curvas de comutação da máquina 2 que se verifica que, além da habitual variação das curvas de comutação quando se passa para a região modificada, observa-se que o inventário máximo da máquina 2 diminui, o que leva a um pior desempenho do sistema quando se passa para a região modificada utilizando esta equação. Esta é a razão pela qual não foi utilizada esta hipótese.

A.2 Aumento global de todos os parâmetros da função de custo elementar modificada

Uma outra hipótese considerada foi a passagem para a região modificada através de um aumento igualitário de todos os parâmetros, representada no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} h_1' = h_1' + \Delta \\ p_1' = p_1' + \Delta \\ h_2' = h_2' + \Delta \\ p_2' = p_2' + \Delta \end{cases} \tag{A.1}$$

A evolução das curvas de comutação para este caso está representada na figura A.2.
Pode-se observar que existe uma variação apreciável das curavs de comutação da máquina 1 que incluem um aumento do inventário máximo. Na máquina 2 observa-se uma diminuição do inventário máximo. Logo, esta hipótese não se apresenta como sendo adequada para utilizar como comparação da função de custo elementar clássica com a modificada.

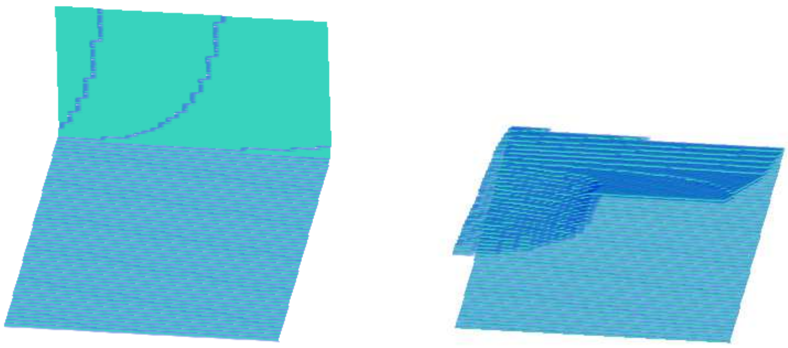

Figura A.2: Evolução das curvas de comutação.

Apêndice B

Resultados obtidos para o modelo I

Neste apêndice apresenta-se os resultados experimentais obtidos para um sistema de duas máquina em série com avarias e produção de lotes pela máquina 1 modelado pelo denominado modelo I em [6]. Este modelo consiste em generalizar o modelo de um sistema com avarias e sem produção de lotes para a possibilidade da máquina 1 produzir lotes, mas sem acrescentar a variável de estado x_5 para o número de peças que estão a ser produzidas num lote pela máquina 1. A vantagem deste modelo é que permite separar as variáveis de controlo, ao contrário do modelo II em que se utiliza a variável de estado x_5.

A cadeia de Markov para este sistema será equivalente à cadeia para um sistema com avarias e sem lotes, com a seguinte excepção: quando a máquina 1 produz um lote, o sistema não vai para o estado (x_1+1, x_2, x_3, x_4) mas para o estado (x_1+b, x_2, x_3, x_4), em que b é o número de peças a ser produzidas num lote pela máquina 1. A equação de Bellman também será aproximadamente equivalente, com a excepção de que se deve substituir na equação de Bellman para um sistema com avarias e sem lotes a expressão

$$min\left\{J(x_1, x_2, x_3, x_4), J(x_1+1, x_2, x_3, x_4)\right\}, \tag{B.1}$$

pela expressão

$$min\left\{J(x_1, x_2, x_3, x_4), J(x_1+1, x_2, x_3, x_4), J(x_1+2, x_2, x_3, x_4), ..., J(x_1+b, x_2, x_3, x_4)\right\}, \tag{B.2}$$

até que $b = b_{max}$ ou $b = (x_2 - x_1)$.
Para este modelo o autor de [6] prova teóricamente que as curvas de comutação do controlo óptimo são monótonas para a função de custo elementar clássica. Tal pode verificar-se experimentalmente pelos exemplos descritos na tabela B.1 para um sistema em que a máquina 1 é capaz de produzir no máximo três peças por lote.

Ex.	μ_1	μ_2	λ	ϕ_1	ϕ_2	ξ_1	ξ_2	$h1$	$p1$	$h2$	fig.
1	0.4	1.2	1.0	0.01	0.01	10.0	10.0	2	4	1	B.1
2	0.4	1.2	1.0	0.1	0.1	5.0	5.0	2	4	1	B.2
3	0.5	1.5	1.0	0.01	0.01	5.0	5.0	2	4	1	B.3
4	0.5	1.5	1.0	0.1	0.1	5.0	5.0	2	4	1	B.4

Tabela B.1: Parâmetros dos vários exemplos.

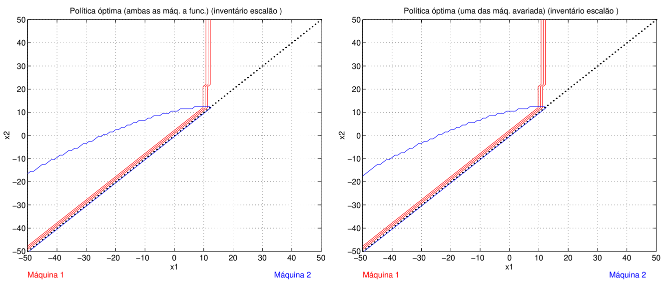

Figura B.1: Curvas de comutação para o exemplo 1.

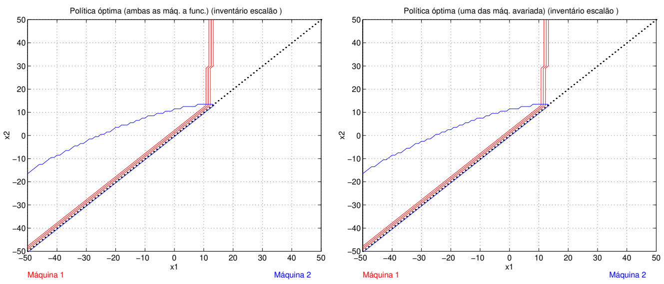

Figura B.2: Curvas de comutação para o exemplo 2.

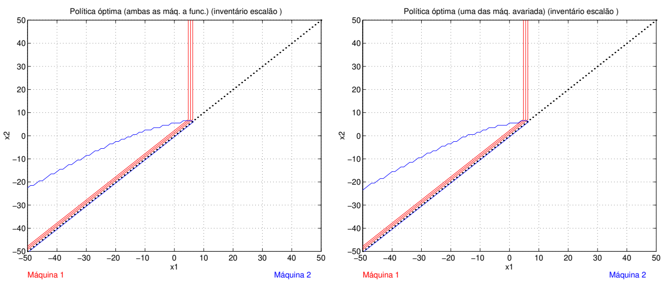

Figura B.3: Curvas de comutação para o exemplo 3.

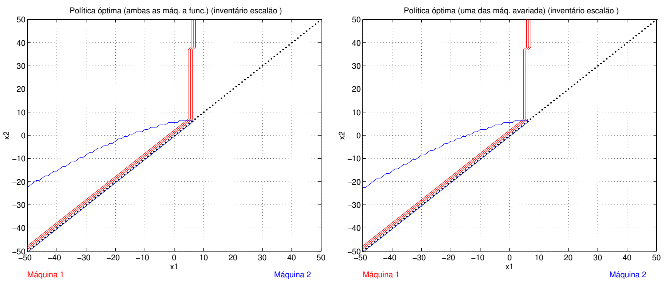

Figura B.4: Curvas de comutação para o exemplo 4.

Apêndice C

Comparação das funções de custo elementar para um sistema s.l.s.a.

Neste apêndice apresenta-se mais dois conjuntos de exemplos para comparação da função de custo elementar clássica com a modificada para um sistema de duas máquinas em série sem avarias e sem produção de lotes. Nas tabelas C.1 e C.2 apresenta-se os parâmetros e os resultados referentes ao primeiro conjunto de exemplos, em que a diferença em relação ao Capítulo 7 reside no aumento do valor do parâmetro p'_1 para o valor 4.5. Isto é, aumentou-se o peso do parâmetro associado ao inventário escalão x_1^-.

Nas tabelas C.3 e C.4 apresentam-se os parâmetros e os resultados referentes ao segundo conjunto de exemplos, em que a diferença em relação ao Capítulo 7, reside numa maior carga do sistema, ou seja, diminui-se a taxa máxima de produção da máquina 1 em 10%.
Em ambos os conjuntos, observam-se os mesmos resultados do Capítulo 7. Mas a diferença entre as distribuições de probabilidade para a função de custo elementar clássica e para a modificada, não é tão notória como no capítulo 7, especialmente para o primeiro conjunto.

ex.	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	E(custo)	i.c. 95%
1	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	12.4873	0.1006
2	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.2	12.5472	0.1014
3	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0	12.6011	0.1023
4	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0.2	12.6382	0.1039
5	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0.5	12.7549	0.1059

Tabela C.1: Parâmetros utilizados em cada exemplo.

ex.	tempo médio entre regenerações	intervalo de confiança a 95%	ponto de regeneração (x_1, x_2)
1	19.3032	0.0783	(8,11)
2	18.3993	0.0713	(8,11)
3	18.3140	0.0701	(8,11)
4	17.9162	0.0691	(8,11)
5	17.8933	0.0686	(8,11)

Tabela C.2: Resultados do cálculo dos tempos médios de regeneração para cada exemplo.

ex.	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	E(custo)	i.c. 95%
6	0.9	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	16.7300	0.2195
7	0.9	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.2	16.4957	0.2055
8	0.9	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0	16.3501	0.1979
9	0.9	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.2	16.4412	0.1998
10	0.9	1	0.8	0.5	2.5	0.5	0.5	16.5587	0.2018

Tabela C.3: Parâmetros utilizados em cada exemplo

ex.	tempo médio entre regenerações	intervalo de confiança a 95%	ponto de regeneração (x_1, x_2)
6	16.7300	0.2195	(8,10)
7	16.4957	0.2055	(8,10)
8	16.3501	0.1979	(8,10)
9	16.4412	0.1998	(8,10)
10	16.5587	0.2018	(8,10)

Tabela C.4: Resultados do cálculo dos tempos médios de regeneração para cada exemplo

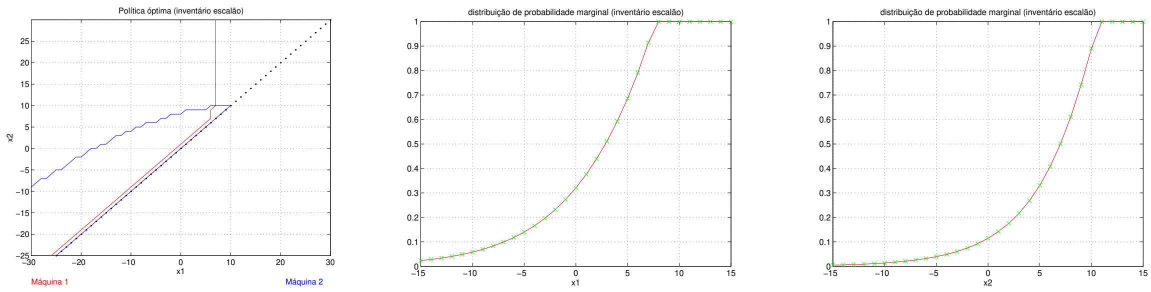

Figura C.1: Exemplo 1.

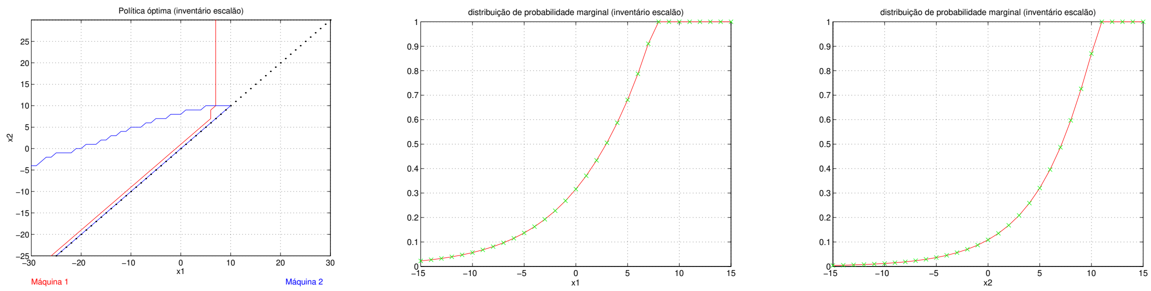

Figura C.2: Exemplo 2.

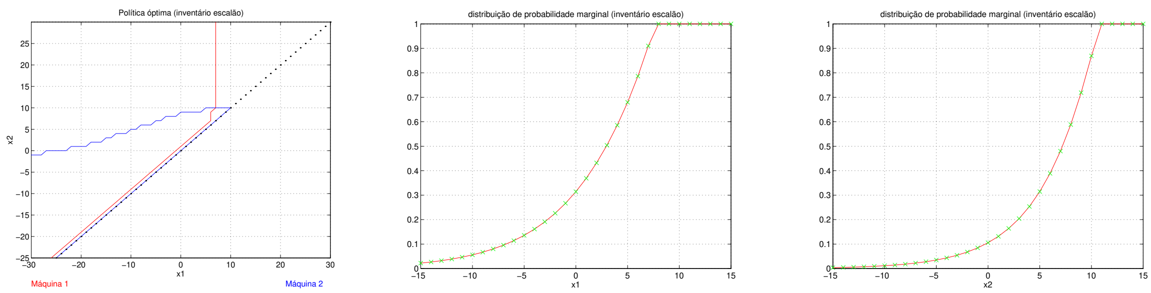

Figura C.3: Exemplo 3.

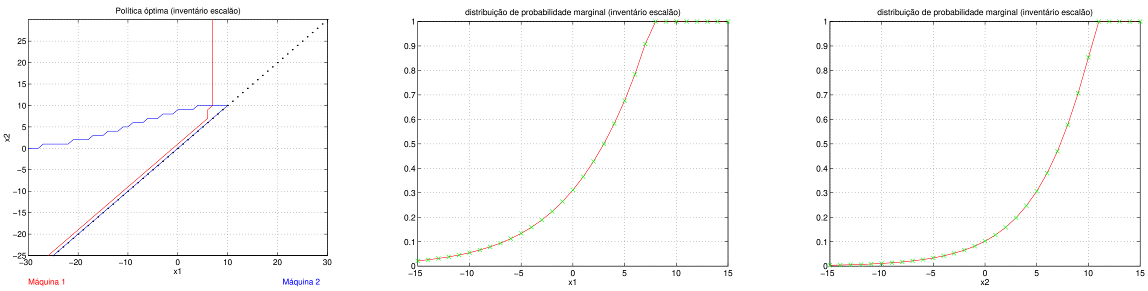

Figura C.4: Exemplo 4.

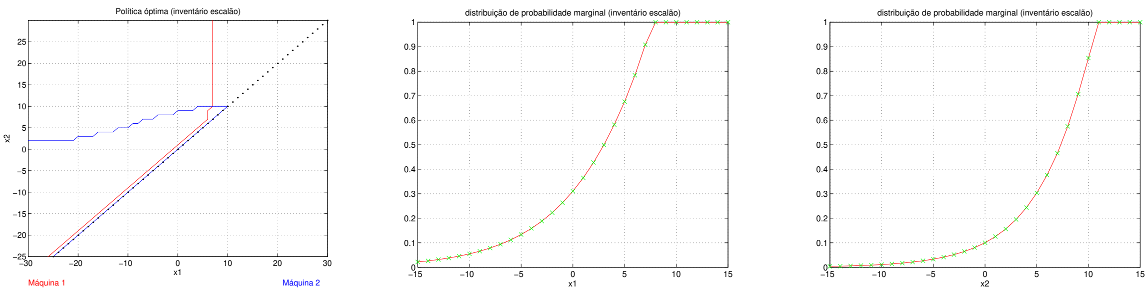

Figura C.5: Exemplo 5.

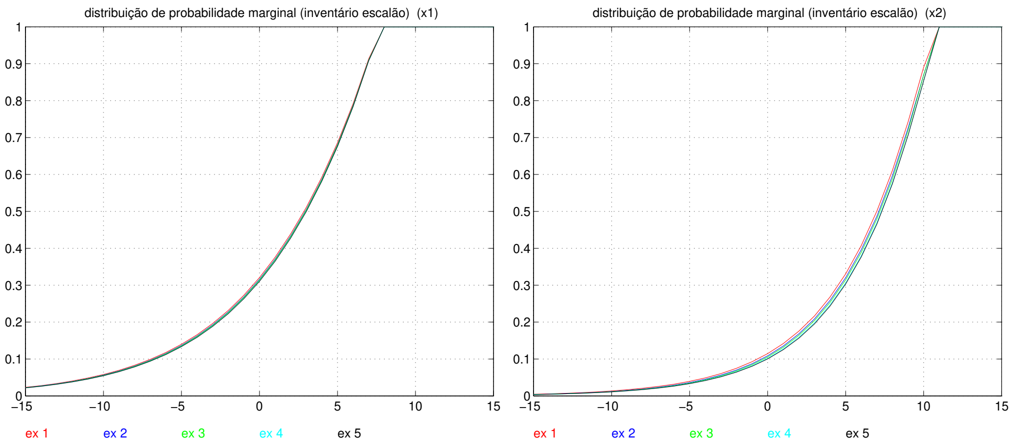

Figura C.6: Comparação dos exemplos descritos na tabela C.1

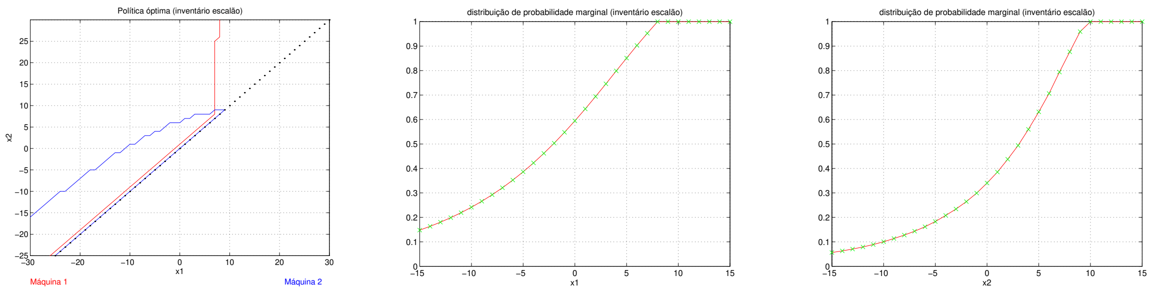

Figura C.7: Exemplo 6.

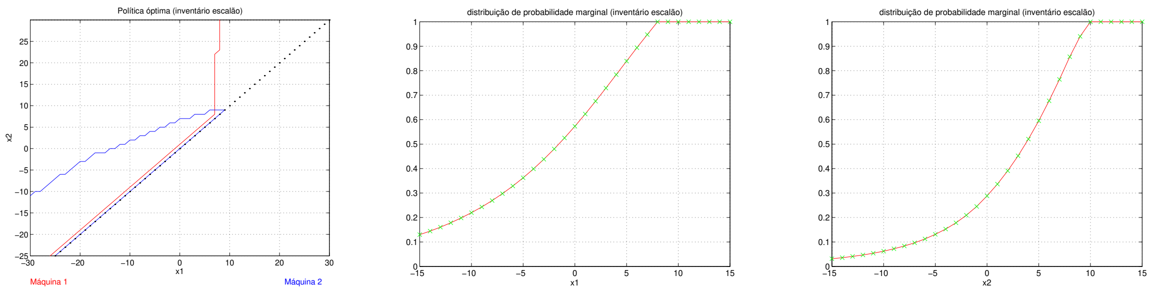

Figura C.8: Exemplo 7.

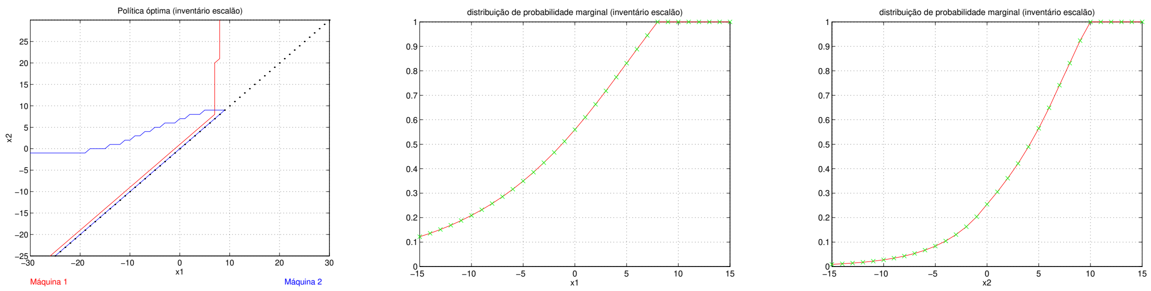

Figura C.9: Exemplo 8.

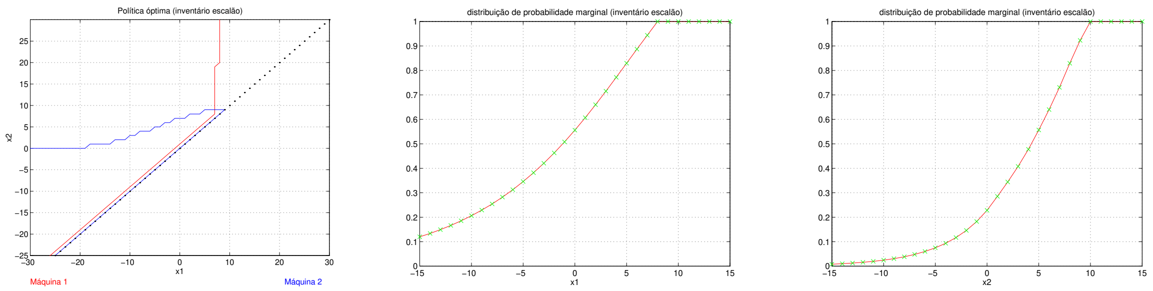

Figura C.10: Exemplo 9.

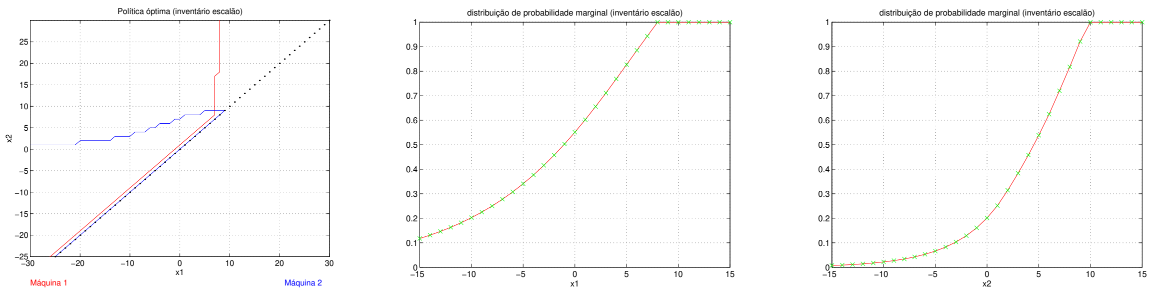

Figura C.11: Exemplo 10.

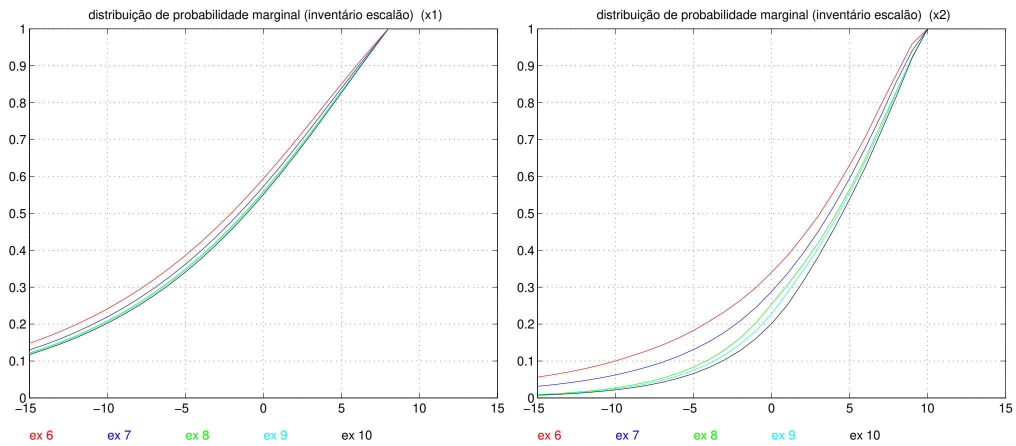

Figura C.12: Comparação dos exemplos descritos na tabela C.3

Apêndice D

Comparação das funções de custo elementar para um sistema s.l.c.a.

Neste apêndice apresenta-se mais um conjunto de exemplos para comparação da função de custo elementar clássica com a modificada para um sistema de duas máquinas em série com avarias e produção de lotes. Nas tabelas D.1 e D.2 apresentam-se os paraâmetros e os resultados obtidos.
As taxas de avarias e reparação utilizadas foram as seguintes: $\phi_1 = 0.05$; $\phi_2 = 0.05$; $\xi_1 = 1$; $\xi_2 = 1$.

ex.	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	E(custo)	i.c. 95%
1	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	18.3654	0.1964
2	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.2	18.3998	0.1709
3	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0	18.4469	0.1678
4	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0.2	18.5351	0.2050
5	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	0.5	18.6131	0.2030

Tabela D.1: Parâmetros utilizados para cada exemplo.

ex.	tempo médio entre regenerações	intervalo de confiança a 95%	ponto de regeneração (x_1, x_2)
1	20.7889	0.1198	(9,13)
2	20.4788	0.1262	(9,13)
3	20.3911	0.1226	(9,13)
4	20.1558	0.1130	(9,13)
5	30.4920	0.1961	(9,14)

Tabela D.2: Resultados do cálculo dos tempos médios de regeneração para cada exemplo.

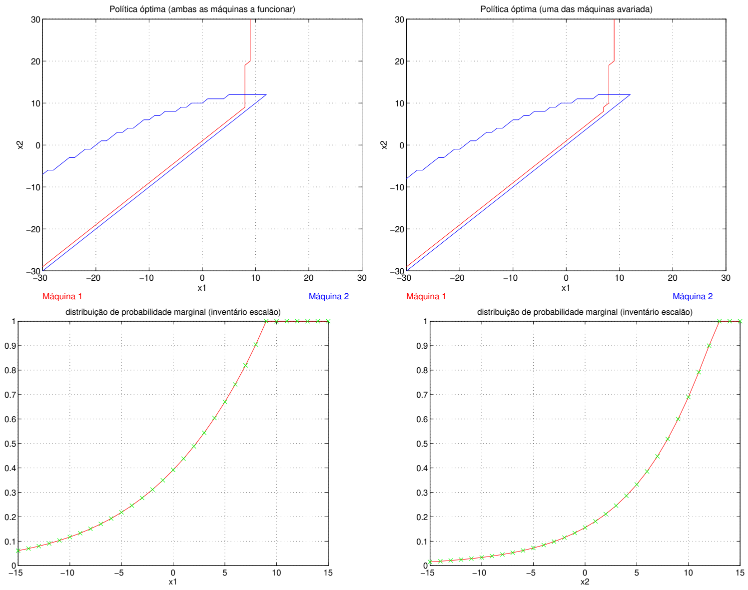

Figura D.1: Exemplo 1.

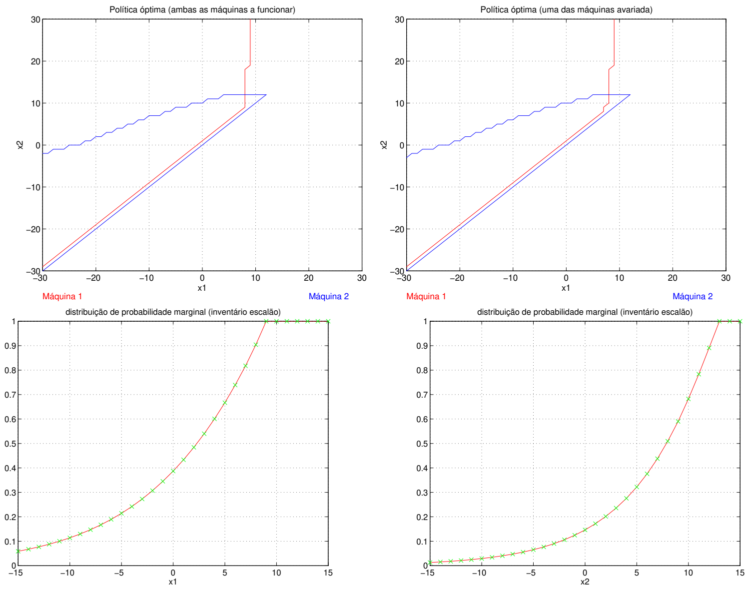

Figura D.2: Exemplo 2.

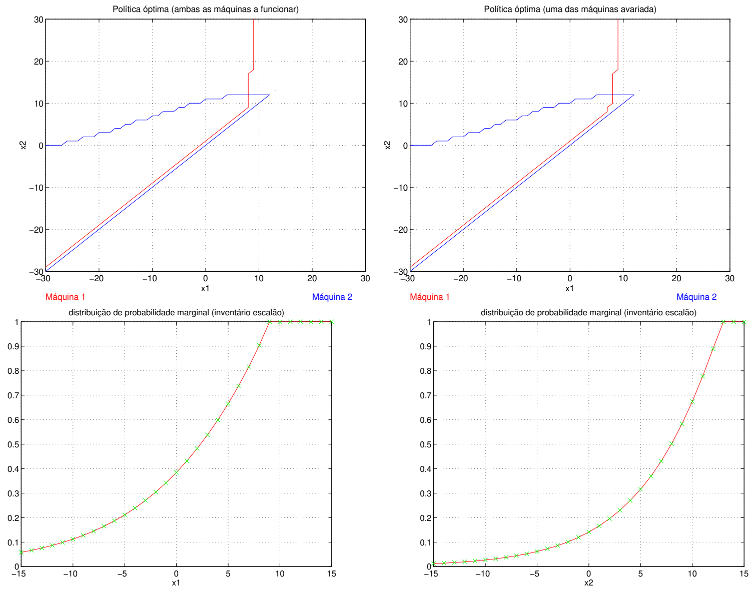

Figura D.3: Exemplo 3.

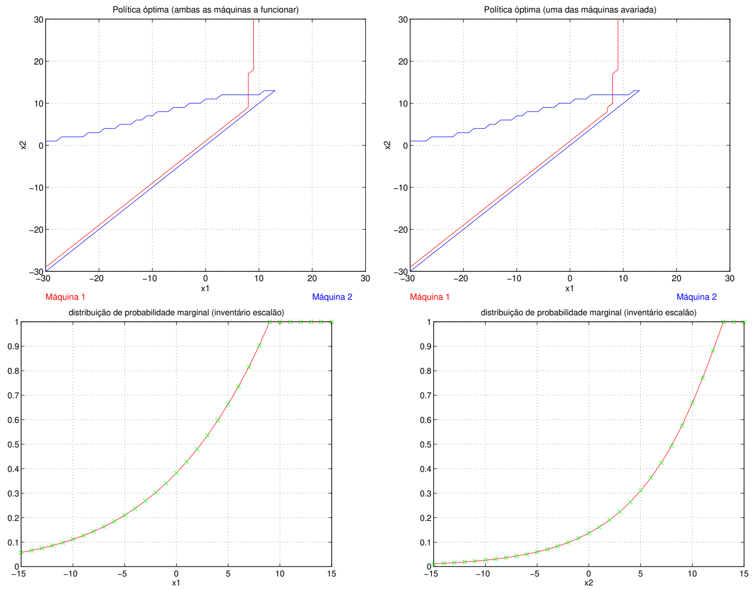

Figura D.4: Exemplo 4.

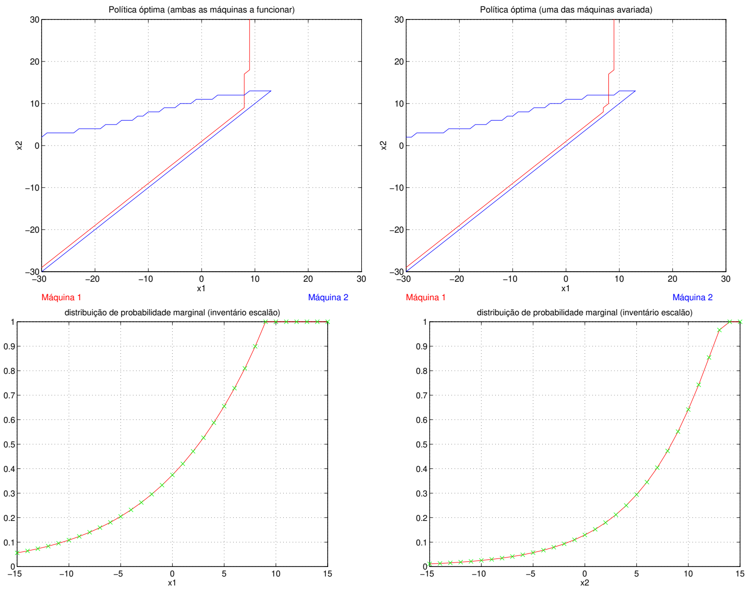

Figura D.5: Exemplo 5.

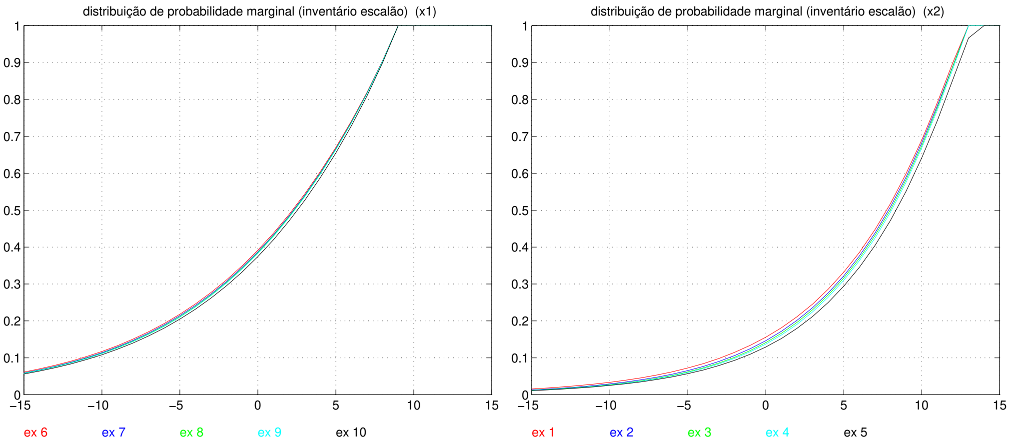

Figura D.6: Comparação das distribuições de probabilidade dos vários exemplos.

Apêndice E

Evolução das curvas de comutação para um sistema s.l.s.a.

Neste apêndice apresenta-se um conjunto de figuras que demonstram a evolução das curvas de comutação com os parâmetros de um sistema de duas máquinas em série, sem avarias e sem produção de lotes. A evolução das curvas de comutação é apresentada na forma de uma "colagem" de um conjunto de curvas de comutação, sendo cada uma delas calculada com um valor diferente do parâmetro ou parâmetros que estão a ser estudados.

A evolução das curvas de comutação é da esquerda para a direita em cada figura. Para mais informações sobre como se obteve estas figuras e como elas foram desenhadas, deve-se consultar [5] e [11].

Ex.	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	Fig.
1	1	1	[0.05;0.9]	0.5	4.5	0.5	-0.5	E.1
2	[0.75;1]	1	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	E.2
3	1	[0.75;1]	0.8	0.5	4.5	0.5	-0.5	E.3
4	1	1	0.8	0.5	[1.5;50.5]	0.5	-0.5	E.4
5	1	1	0.8	[0.99;0.01]	[4.01;4.99]	[0.01;0.99]	[-0.01;-0.99]	E.5
6	1	1	0.8	0.5	4.5	0.5	[-0.5;0.5]	E.6

Tabela E.1: Parâmetros dos vários exemplos.

Exemplo	h_2	h_1	p_2	Figura
1	0.5	1	4	E.1
2	0.5	1	4	E.2
3	0.5	1	4	E.3
4	0.5	1	[1;50]	E.4
5	[0.01;0.99]	1	4	E.5
6	-	-	-	E.6

Tabela E.2: Parâmetros dos vários exemplos descritos nas variáveis do inventário real.

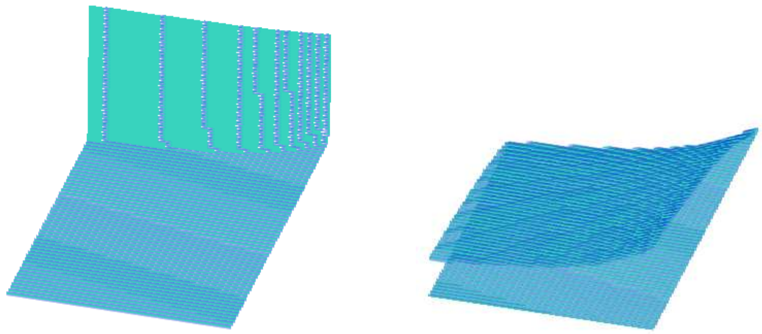

Figura E.1: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro λ.

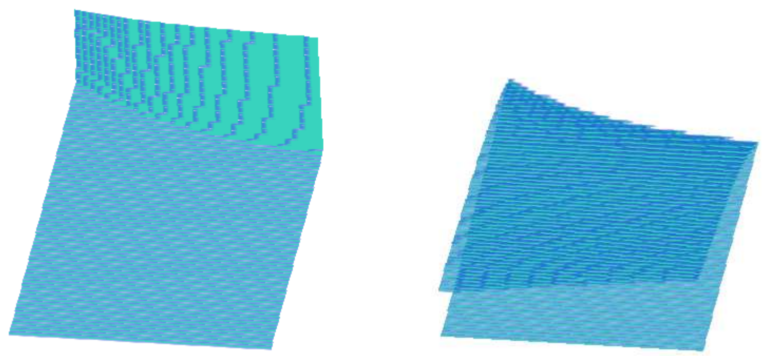

Figura E.2: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro μ_1.

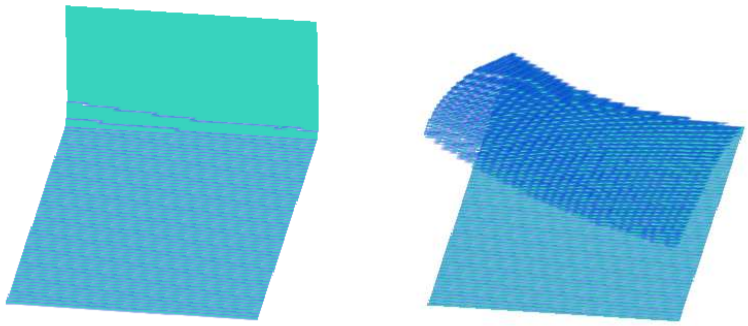

Figura E.3: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro μ_2.

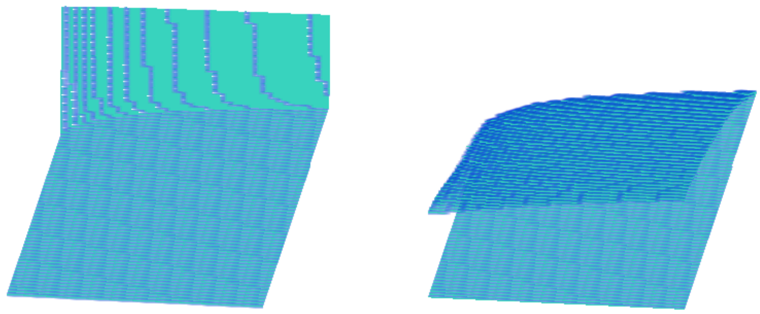

Figura E.4: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro p_1.

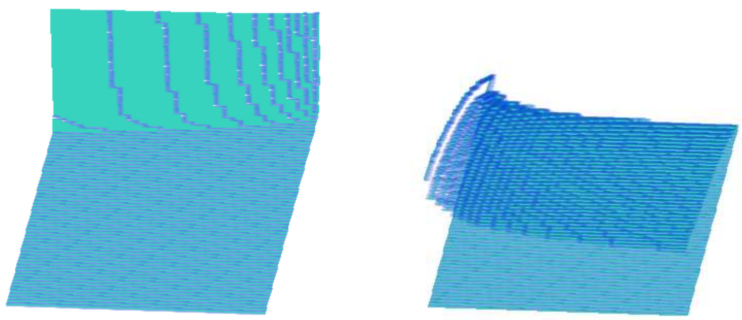

Figura E.5: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro h_2.

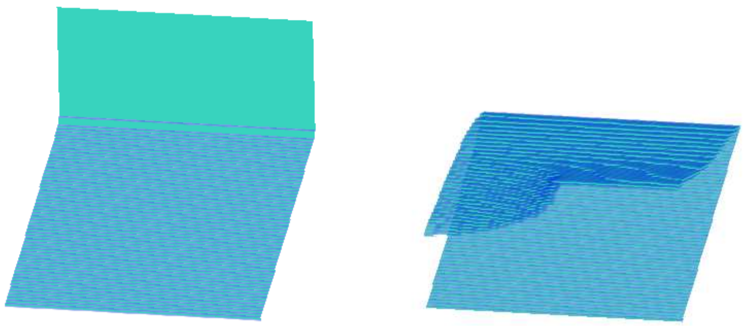

Figura E.6: Evolução das curvas de comutação com o parâmetro p_2'.

Apêndice F

Evolução das curvas de comutação para um sistema s.l.c.a.

Neste apêndice apresenta-se um conjunto de figuras que demonstram a evolução das curvas de comutação com os parâmetros de um sistema de duas máquinas em série com avarias e sem produção de lotes.

Ex.	μ_1	μ_2	λ	h'_1	p'_1	h'_2	p'_2	Figura
1	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	-0.5	F.1 e F.2
2	1	1	0.8	0.5	2.5	0.5	]-0.5;0.5[	F.3 e F.4

Tabela F.1: Parâmetros dos vários exemplos.

Ex.	h_2	h_1	p_2	ϕ_1	ϕ_2	ξ_1	ξ_2	Figura
1	0.5	1	2	[0.01;0.8]	0.01	1	1	F.1 e F.2
2	-	-	-	0.05	0.05	1	1	F.3 e F.4

Tabela F.2: Parâmetros dos vários exemplos.

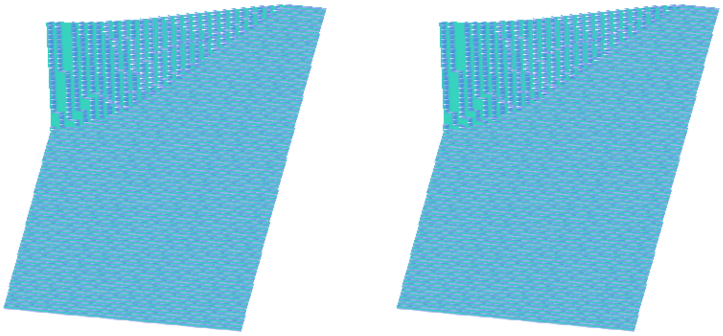

Figura F.1: Evolução das curvas de comutação da máquina 1 com o parâmetro ϕ_1 (máquina 2 a funcionar (esquerda) ; máquina 2 avariada (direita)).

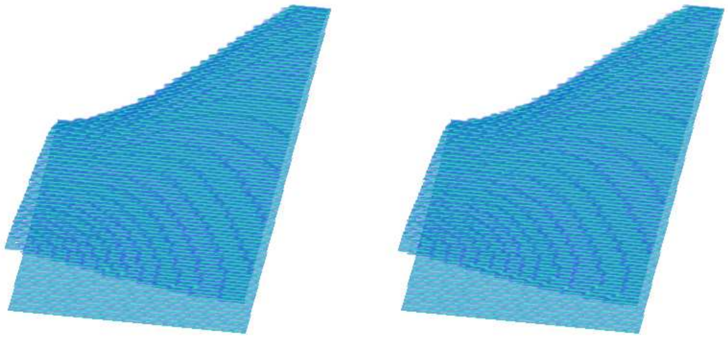

Figura F.2: Evolução das curvas de comutação da máquina 2 com o parâmetro ϕ_1 (máquina 1 a funcionar (esquerda) ; máquina 1 avariada (direita)).

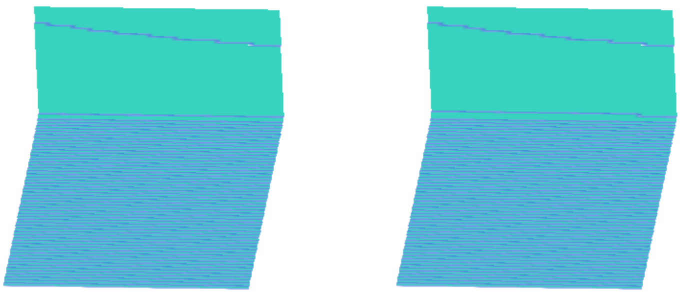

Figura F.3: Evolução das curvas de comutação da máquina 1 com o parâmetro p_2' (máquina 2 a funcionar (esquerda) ; máquina 2 avariada (direita)).

Figura F.4: Evolução das curvas de comutação da máquina 2 com o parâmetro p'_2 (máquina 1 a funcionar (esquerda) ; máquina 1 avariada (direita)).

Bibliografia

[1] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models 4th ed.* San Diego,California: Academic Press, 1989.

[2] S. M. Ross, *Stochatic Processes 2nd ed.* New York: John Wiley & Sons, 1996.

[3] M. H. Veatch and L. M. Wein, "Optimal control of a two-station tandem production/inventory system," *Operations Research*, vol. 42, Mar. 1994.

[4] S. X. L. Garrett Van Ryzin and S. B. Gershwin, "Production control of a tandem two-machine system," *IEE Tansactions*, vol. 25, Sept. 1993.

[5] J. A. A. Moreira, *MAQDP, A Software Package to Compute and Simulate the Optimal Control Policies for a two Station Tandem System with Batch Production and Unreliable Machines.* Instituto Superior Técnico, 1998.

[6] C. F. G. Bispo, "Modeling a two-station tandem system to acommodate batch and machine failures," *Working paper*, 1998.

[7] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control Vol.2.* Belmont, Massachusetts: Athena Publishing, 1995.

[8] J. A. A. Moreira and C. F. G. Bispo, "An echelon inventory based single stage cost function for a two station tandem system," *Proceedings of the Rensselaer's International Conference on Agile, Intelligent, and Compter-Integrated Manufacturing*, 1998.

[9] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming: deterministic and stochastic models.* Englewood Cliffs,New Jersey: Prentice-Hall, 1987.

[10] R. A. Wolff, *Stochastic Modelling and the Theory of Queues.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

[11] B. Hibbard and D. Santek, *Complete Guide for using Vis5d.* Space Science and Engineering Center, University of Wiscounsin.