Sumário

- Problema do Fluxo Máximo
  - Definição elementares
- Método de Ford-Fulkerson
- Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo

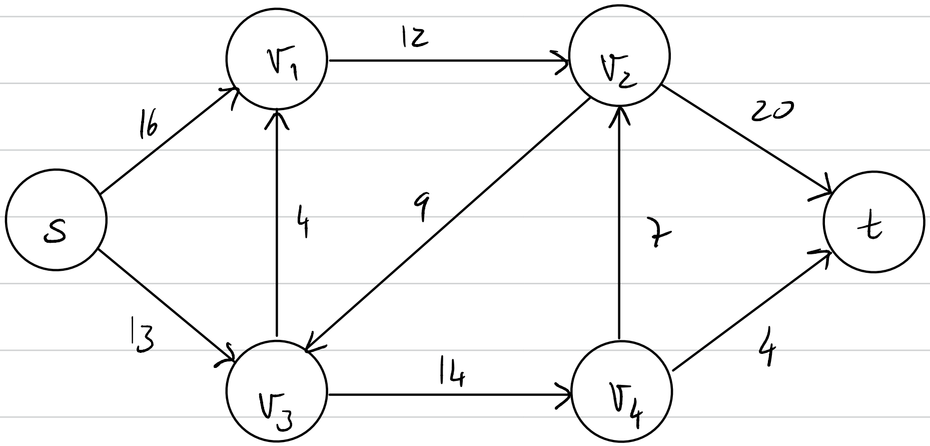
Aula 15

Definição [Redes de Fluxo]

Uma rede de fluxo é um grafo $G = (V, E)$ com dois vértices notáveis s e t, respectivamente nó fonte (source) e nó de terminação, e uma função de capacidade $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, tais que:

- $\forall u, v \in V.\ c(u,v) \geq 0$
- $\forall u, v \in V.\ (u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \notin E$ (não há arcos anti-paralelos)
- $\forall v \in V.\ s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ (conectividade s-t)

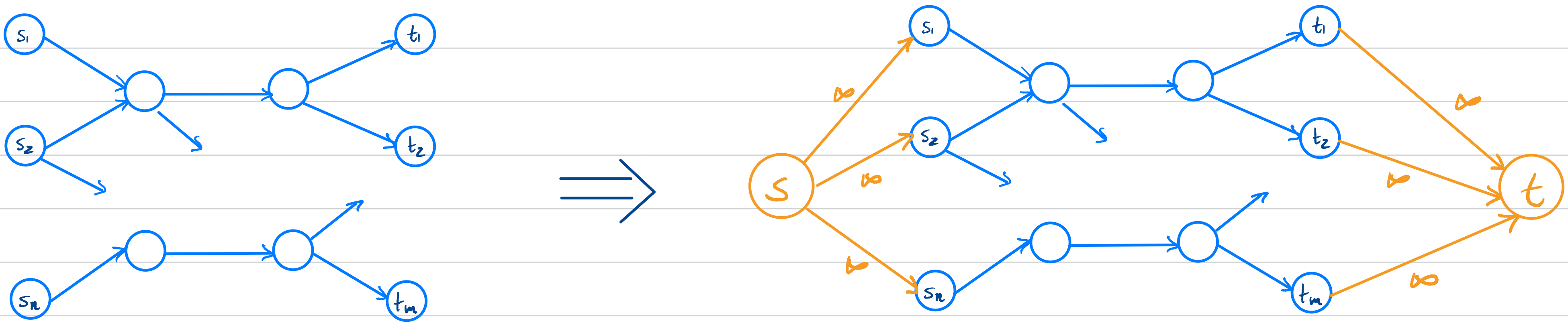
Para simplificar a notação escrevemos: $G = (V, E, s, t, c)$



Exemplo

Redes de Fluxo - Estratégias de Modelação

I Múltiplas Fontes/Sumidouros



II Arcos Anti-paralelos

Definição [Função de Fluxo]

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo, uma função $f: V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ diz-se um fluxo em G se satisfaz as seguintes restrições:

[Restrição de Capacidade]

$$\forall_{u,v \in V}.\ f(u,v) \leq c(u,v)$$

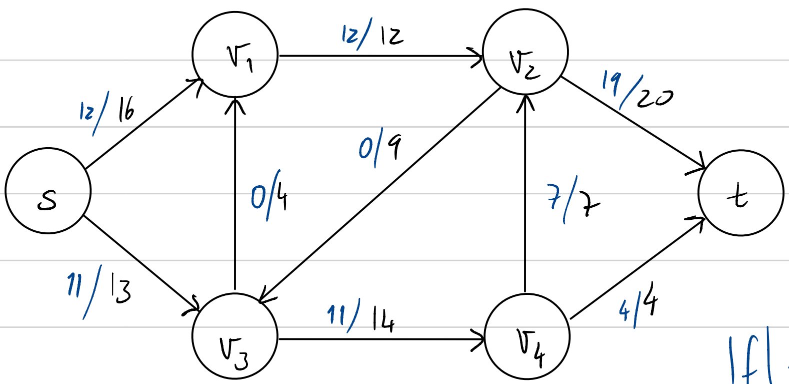
[Conservação do Fluxo]

$$\forall_{u \in V \setminus \{s,t\}}.\ \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$$

Definição [Valor de Fluxo]

Seja f uma função de fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, o valor de f, q se denota por $|f|$, é definido como:

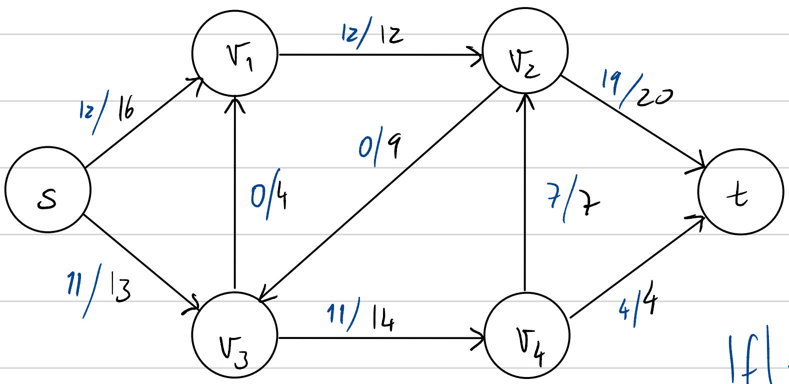
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$



$|f| = 12 + 11 = \underline{\underline{23}}$

Definição [Problema do Fluxo Máximo]

Dada uma rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, determinar o fluxo f^* de valor máximo em G.



$|f| = 12 + 11 = \underline{\underline{23}}$

- O fluxo f é um fluxo máximo em G?

Definição [Rede Residual]

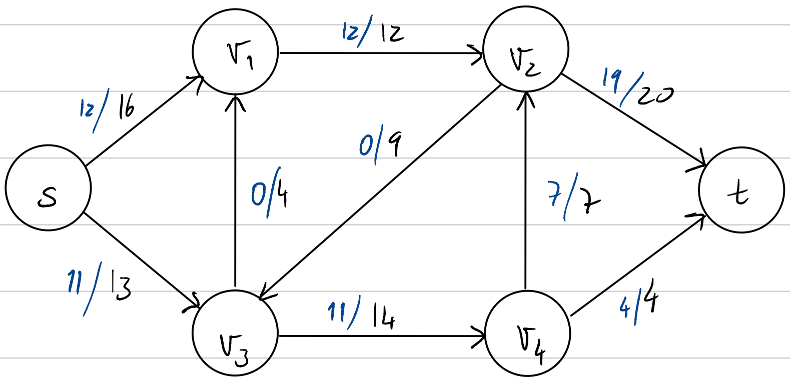
Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo e f um fluxo em G, a rede residual induzida por f em G, denotada por G_f, é definida como se segue:

- $G_f = (V, E_f, s, t, c_f)$

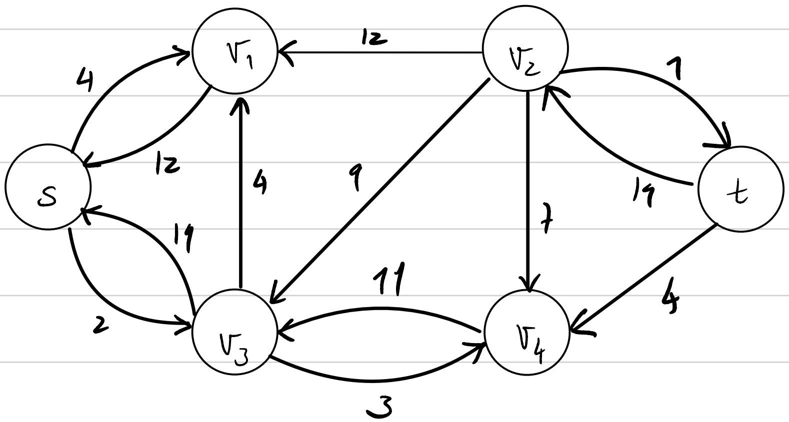
- $c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \end{cases}$

- $E_f = \{ (u,v) \mid c_f(u,v) > 0 \}$

Fluxo & Rede de Fluxo



Rede Residual



Definição [Fluxo Aumentado]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e f' um fluxo na rede residual G_f, o fluxo f aumentado de f', designado por $f \uparrow f'$, é definido como se segue:

$$f \uparrow f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{se } (u,v) \in E \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f.
Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f.
Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

- Há que provar que:
  1. (I) $f \uparrow f'$ satisfaz a restrição de capacidade para todo o arco $(u,v) \in E$.
  2. (II) $f \uparrow f'$ satisfaz a restrição de conservação do fluxo para todo o vértice $v \in V \setminus \{s,t\}$.
  3. (III) $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$

(I) $|f \uparrow f'|$ satisfaz a restrição de capacidade para todo o arco $(u,v) \in E$.

$\forall (u,v) \in E.\ (f \uparrow f')(u,v) \leq c(u,v)$

$$
\begin{aligned}
f \uparrow f'(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\
&\leq f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v)) - f'(v,u) \qquad \left(f'(u,v) \leq c(u,v) - f(u,v) \right) \\
&= c(u,v) - f'(v,u) \\
&\leq c(u,v)
\end{aligned}
$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f.
Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

① $f \uparrow f'$ satisfaz a restrição de conservação do fluxo

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\}. \quad \sum_{u \in V} (f \uparrow f')(u, v) = \sum_{u \in V} (f \uparrow f')(v, u)$$

$$\sum_{u \in V} (f \uparrow f')(u, v) = \sum_{u \in V} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

$$= \sum_{u \in V} f(u,v) + \sum_{u \in V} f'(u,v) - \sum_{u \in V} f'(v,u)$$

$$= \sum_{u \in V} f(v,u) + \sum_{u \in V} f'(v,u) - \sum_{u \in V} f'(u,v)$$

$$= \sum_{u \in V} f(v,u) + f'(v,u) - f'(u,v)$$

$$= \sum_{u \in V} f \uparrow f'(v,u)$$

Lema do Fluxo Aumentado

Seja f um fluxo numa rede de fluxo G e f' um fluxo na rede residual G_f.
Então $f \uparrow f'$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

- $V_1 = \{ v \mid (s, v) \in E \}$
- $V_2 = \{ v \mid (v, s) \in E \}$

(II) $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$

$$|f \uparrow f'| = \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(v, s)$$

$$= \sum_{v \in V_1} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f \uparrow f')(v, s)$$

$$= \sum_{v \in V_1} f(s, v) + \sum_{v \in V_1} f'(s, v) - \sum_{v \in V_1} f'(v, s) - \left(\sum_{v \in V_2} f(v, s) + \sum_{v \in V_2} f'(v, s) - \sum_{v \in V_2} f'(s, v) \right)$$

$$= \left(\sum_{v \in V_1} f(s, v) - \sum_{v \in V_2} f(v, s) \right) + \left(\left(\sum_{v \in V_1} f'(s, v) + \sum_{v \in V_2} f'(s, v) \right) - \left(\sum_{v \in V_1} f'(v, s) + \sum_{v \in V_2} f'(v, s) \right) \right)$$

$$= |f| + \left(\sum_{v \in V} f'(s, v) - \sum_{v \in V} f'(v, s) \right)$$

$$= |f| + |f'|$$

Definição [Caminho de Aumento]

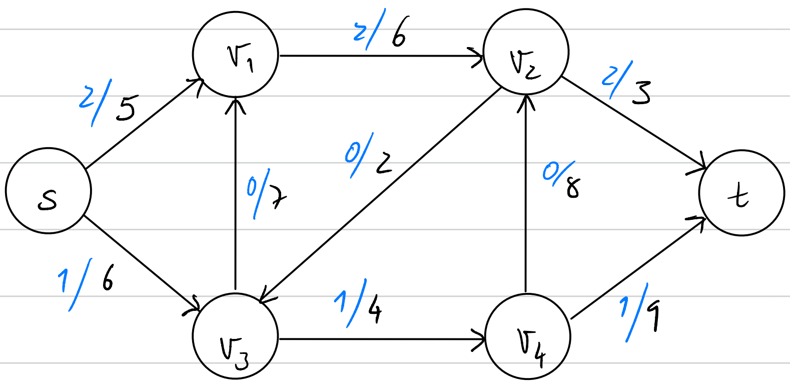
- Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$, um caminho de aumento é um caminho na rede residual G_f.
- Seja p um caminho de aumento na rede residual G_f, a capacidade residual de p é dada por:

$$c_f(p) = \min\{\, c_f(u,v) \mid (u,v) \in p \,\}$$

- Seja p um caminho de aumento, o fluxo induzido por p é definido como se segue:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u,v) \in p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Fluxo & Rede de Fluxo



Definição [Caminho de Aumento]

- Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, um caminho de aumento é um caminho na rede residual G_f.
- Seja p um caminho de aumento na rede residual G_f, a capacidade residual de p é dada por:

$$c_f(p) = \min \{ c_f(u,v) \mid (u,v) \in p \}$$

- Seja p um caminho de aumento, o fluxo induzido por p é definido como se segue:

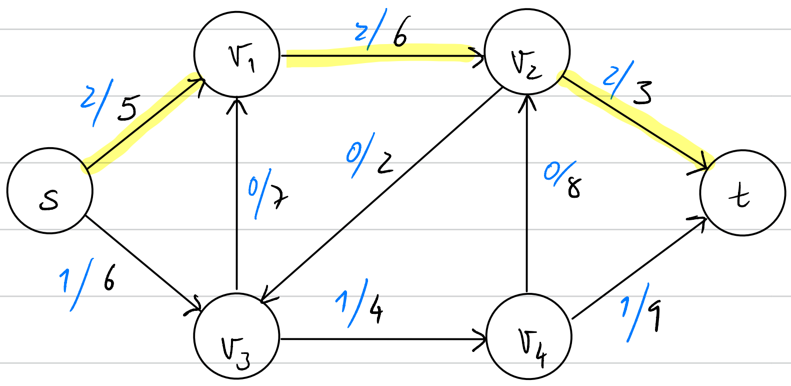
$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u,v) \in p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Lema [Fluxo Induzido por caminho de aumento]

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ e p um caminho de aumento na rede residual G_f; então f_p é uma função de fluxo em G_f e $|f_p| = c_f(p)$.

Prova: exercício

Fluxo & Rede de Fluxo



$p = \langle s, v_1, v_2, t \rangle$

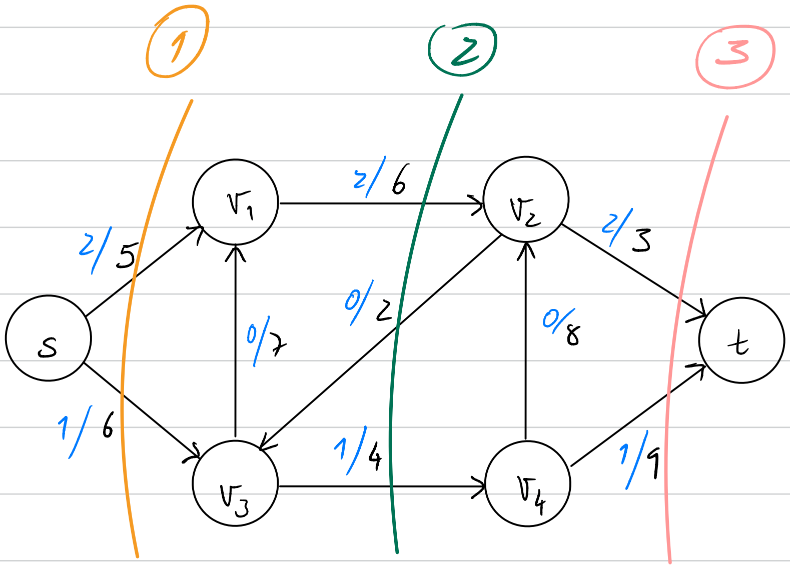
$c_f(p) = 1$

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ é um par (S, T)

onde:

- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$



[Capacidade do Corte]

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

[Fluxo q atravessa o corte]

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

1

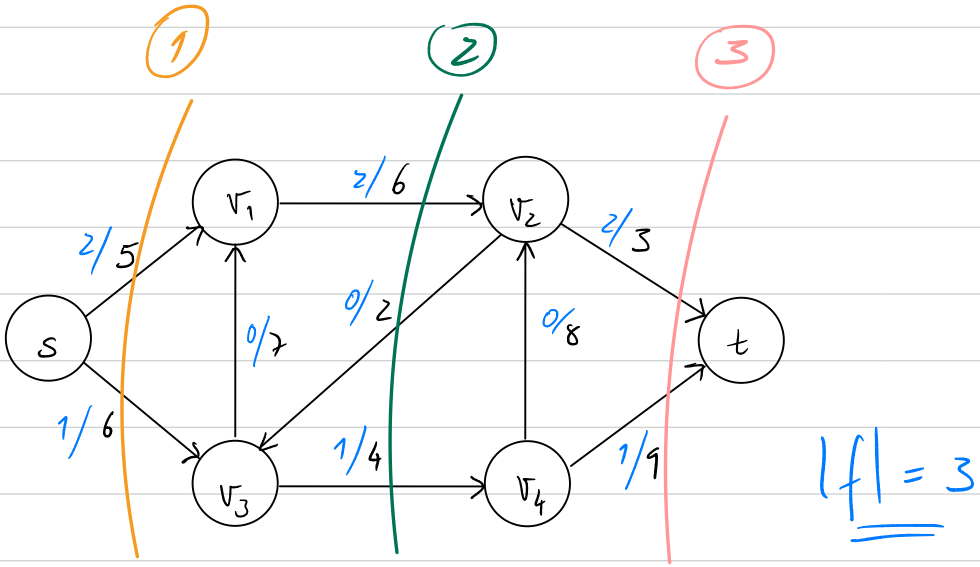
2

3

Definição [Corte em Rede de Fluxo]

Um corte numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$ é um par (S, T) onde:

- $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$
- $s \in S$, $t \in T$



[Capacidade do Corte]

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

[Fluxo q atravessa o corte]

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

1. $c(S,T) = 11$
   $f(S,T) = 3$

2. $c(S,T) = 10$
   $f(S,T) = 3$

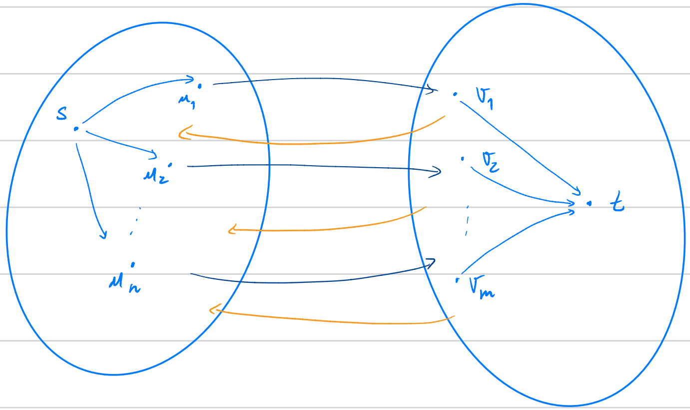
3. $c(S,T) = 12$
   $f(S,T) = 3$

Lema do Corte em Rede de Fluxo

Seja $G=(V,E,s,t,c)$ uma Rede de fluxo, f um fluxo em G e (S,T) um corte em G; então:

$$|f| = f(S,T)$$

prova



$$f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$$

$$= \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s) + \sum_{u\in S\setminus\{s\}} \left(\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v\in V} f(v,u) \right)$$

$$= \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s) + \sum_{u\in S\setminus\{s\}} \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S\setminus\{s\}} \sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\left(\sum_{v\in S} f(u,v) + \sum_{v\in T} f(u,v) \right) - \sum_{u\in S}\left(\sum_{v\in S} f(v,u) + \sum_{v\in T} f(v,u) \right)$$

$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) + \sum_{u\in S}\sum_{v\in S} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in S} f(v,u) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$= \underline{f(S,T)}$$

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

(i) $\Rightarrow$ (ii)

f é um fluxo máximo $\Rightarrow$ Não existem caminhos de aumento em G_f

- Fazemos a prova por contradição. Suponhamos que:
  - f é um fluxo máximo
  - Existe um caminho de aumento p em G_f

    ↳ $f \uparrow f_p$ é um fluxo em G e $|f \uparrow f_p| = \underbrace{|f| + |f_p| > |f|}$

    ↳ f não é fluxo máximo em G.

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

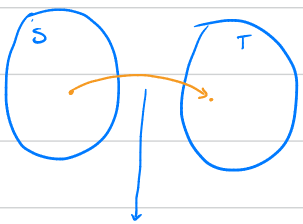
(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

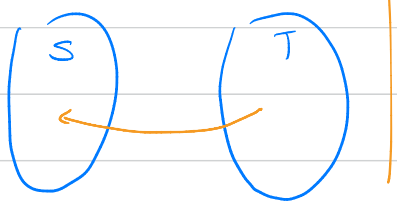
(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Não existem caminhos de aumento em G_f $\Rightarrow$ $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G

- Suponhamos q não existem caminhos de aumento em G_f.
- Seja $S = \{v \mid s \rightsquigarrow v \text{ em } G_f\}$ e $T = V \setminus S$



os arcos de G q atravessam o corte têm de estar saturados senão existiria um caminho s-t em G_f.



- Os arcos q atravessam o corte de T para S têm de ter fluxo 0 senão existiria um caminho s-t em G_f.

- Do Lema do corte concluímos que: $|f| = f(S,T)$

$$f(S,T) = c(S,T)$$

$$|f| = c(S,T)$$

Teorema do Fluxo Máximo/Corte-Mínimo

Seja f um fluxo numa rede de fluxo $G=(V,E,s,t,c)$; as seguintes proposições são equivalentes:

(i) f é um fluxo máximo

(ii) Não existem caminhos de aumento em G_f

(iii) $|f| = c(S,T)$ para algum corte em G.

Prova

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) $\Rightarrow$ f é um fluxo máximo

- Admitimos, por contradição, que:
  - $|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) em G
  - f não é um fluxo máximo

$|f| = f(S,T) = c(S,T)$

Existe f^* tal que $|f^*| > |f|$

$|f^*| = f^*(S,T) \leq c(S,T)$

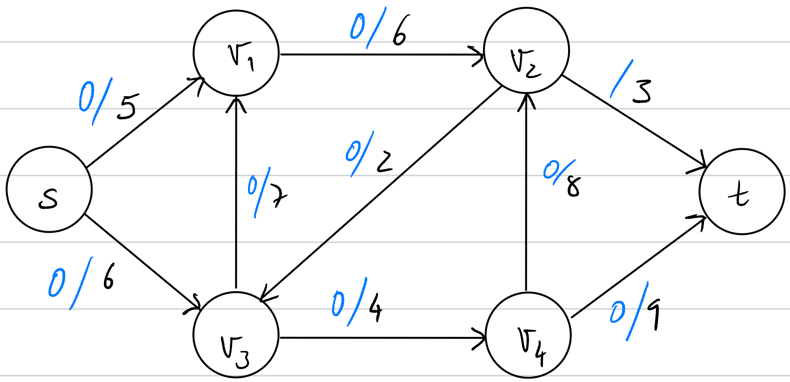
$\therefore$

Método de Ford-Fulkerson

```
FordFulkerson(G)
  let f be a 0-flow in G
  while (true)
    Compute G_f
    let p be an augmenting path in G_f
    if (!p) return f
    compute f_p
    f := f ↑ f_p
```

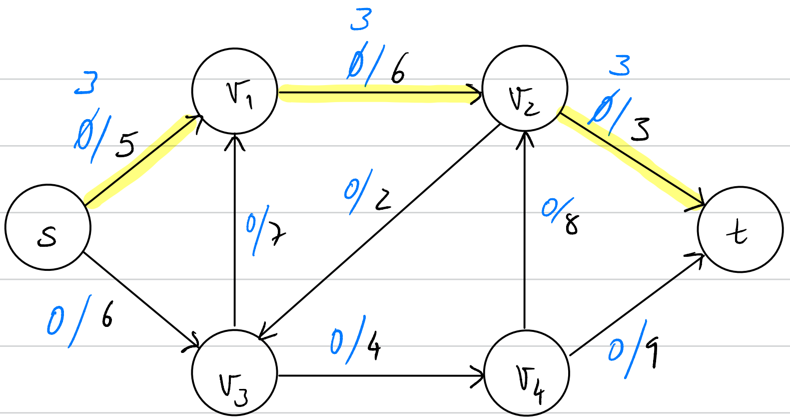
Método de Ford-Fulkerson

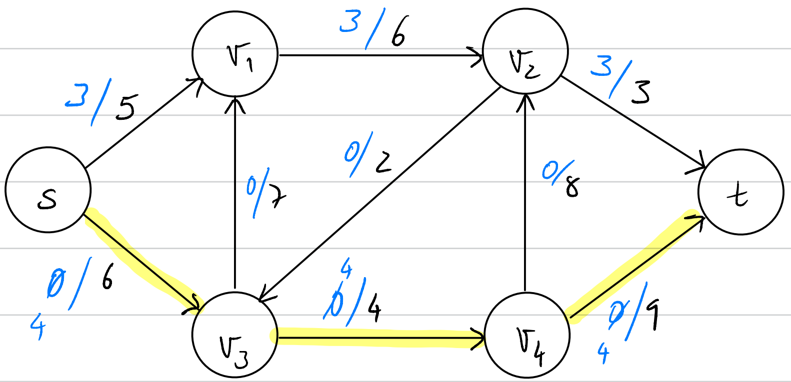
FordFulkerson (G)
    let f be a 0-flow in G
    while (true)
        compute G_f
        let p be an augmenting path in G_f
        if (!p) return f
        compute f_p
        $f := f \uparrow f_p$

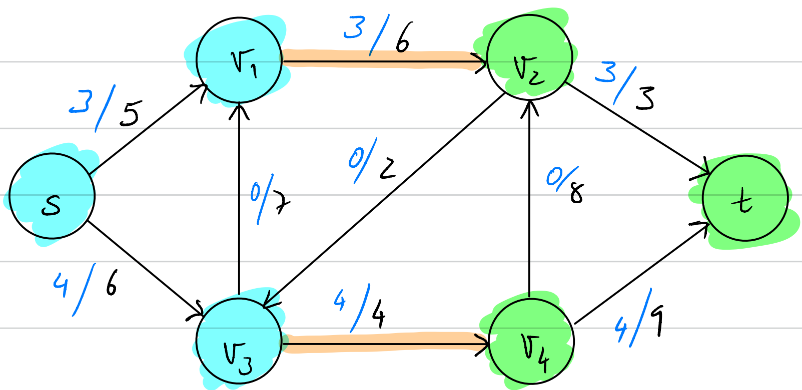


Método de Ford-Fulkerson

FordFulkerson (G)
  let f be a 0-flow in G
  while (true)
    compute G_f
    let p be an augmenting path in G_f
    if (!p) return f
    compute f_p
    $f := f \uparrow f_p$







Método de Ford-Fulkerson

```
FordFulkerson (G)
    let f be a 0-flow in G                          O(E)
    while (true)
        Compute Gf ——————————————————————— O(V+E)
        let p be an augmenting path in Gf —— O(V+E)
        if (!p) return f ————————————————— O(1)
        compute fp ——————————————————————— O(V)
        f := f ↑ fp —————————————————————— O(V)
                                           ————————
                                            O(V+E)
```

Análise da Complexidade

Nº de iterações: $|f|$

Complexidade: $O(E.|f|)$