

Duração: 120 minutos

**Exame de Época Normal - Versão D**

- As perguntas com múltiplas opções têm apenas uma resposta correta. Caso assinale uma resposta errada ou mais de uma resposta, serão descontados 0.5 valores.
- As respostas às perguntas de escolha única têm de ser assinaladas na folha de instruções distribuída.
- Justificar convenientemente as respostas a todas as restantes perguntas.

**Pergunta 1**

2 valores

Um sistema em paralelo com 3 componentes do mesmo tipo funciona se pelo menos uma das componentes funcionar. Sabendo que as componentes funcionam (ou não) independentemente umas das outras e que a probabilidade de cada componente funcionar é 0.4, a probabilidade do sistema funcionar é:

A: 0.216    B: 0.064    C: 0.784    D: 0.936

Acontecimentos e probabilidades:

$F$  = sistema funcionar,  $F_i$  = componente  $i$  funcionar,  $P(F_i) = 0.8$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = 1 - P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) \stackrel{ind.}{=} 1 - P(\bar{F}_1) \times P(\bar{F}_2) \times P(\bar{F}_3) \\ &= 1 - (1 - P(F_1)) \times (1 - P(F_2)) \times (1 - P(F_3)) \stackrel{iden.}{=} 1 - (1 - 0.4)^3 = 0.784 \end{aligned}$$

**Pergunta 2**

3 valores

Numa unidade industrial, uma máquina produz peças metálicas em lotes de pequena dimensão. No final de cada lote, é feita uma inspeção de qualidade a 3 características críticas da peça: espessura, diâmetro e acabamento superficial. Com base em dados históricos, sabe-se que o número  $X$  de características não conformes detetadas numa peça escolhida ao acaso tem a seguinte função massa de probabilidade:

| $x$        | 0    | 1    | 2    | 3    |
|------------|------|------|------|------|
| $P(X = x)$ | 0.65 | 0.20 | 0.10 | 0.05 |

- (a) Mostre que a variância do número de características não conformes detetadas numa peça é maior do que quer o seu número modal quer o seu número mediano. (1.5)

$X$ : número de características não conformes detetadas numa peça.

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (0.2 + 4 \times 0.1 + 9 \times 0.05) - (0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.05)^2 = 1.05 - 0.55^2 = 0.7475$
- $\text{Moda}(X) = 0$  pois  $\max_x P(X = x) = P(X = 0) = 0.65$
- $\text{Mediana}(X) = 0$  pois  $F_X(0) = 0.65 \geq 0.5$  e  $P(X \geq 0) = 1 \geq 0.5$ .

Portanto,  $Var(X) > \text{Moda}(X) = \text{Mediana}(X)$ .

- (b) Cada característica não conforme obriga a uma operação adicional de retrabalho com custo de 5 euros, e sempre que a peça apresenta pelo menos 2 características não conformes é ainda necessária uma inspeção final extraordinária com custo adicional de 4 euros. Seja  $C$  o custo adicional de processamento de uma peça escolhida ao acaso. Determine a função de probabilidade de  $C$  e calcule o respetivo valor esperado. (1.5)

C: custo adicional de processamento (em euros).

Note-se que  $C = 0$  ( $X = 0$ ),  $C = 5$  ( $X = 1$ ),  $C = 2 \times 5 + 4 = 14$  ( $X = 2$ ) e  $C = 3 \times 5 + 4 = 19$  ( $X = 3$ ).

Função de probabilidade de C:

|            |      |      |      |      |
|------------|------|------|------|------|
| $c$        | 0    | 5    | 14   | 19   |
| $P(C = c)$ | 0.65 | 0.20 | 0.10 | 0.05 |

Valor esperado de C:

$$E(C) = 0 \times 0.65 + 5 \times 0.20 + 14 \times 0.10 + 19 \times 0.05 = 0 + 1.00 + 1.40 + 0.95 = 3.35 \text{ euros.}$$

### Pergunta 3

3 valores

O erro de cada medição,  $X$  (em mm), realizada por um sensor de precisão segue uma distribuição uniforme contínua no intervalo  $[-\alpha, \alpha]$ , com  $\alpha > 0$ . Sabe-se que a variância deste erro é  $Var(X) = \frac{25}{3} \text{ mm}^2$ . O sensor é classificado como instável se o valor absoluto do erro cometido numa medição for superior a 2 mm.

- (a) Determine o valor de  $\alpha$  e calcule a probabilidade de uma medição resultar num estado instável. (2.0)

Obtenção do parâmetro  $\alpha$  da distribuição uniforme contínua:

$$\text{Se } X \sim U(-\alpha, \alpha), \text{ então } Var(X) = \frac{(\alpha - (-\alpha))^2}{12} = \frac{(2\alpha)^2}{12} = \frac{\alpha^2}{3}.$$

$$\text{Como } Var(X) = \frac{25}{3}, \text{ então } \frac{\alpha^2}{3} = \frac{25}{3} \iff \alpha^2 = 25 \implies \alpha = 5.$$

Cálculo da probabilidade de uma medição resultar num estado instável, i.e.,  $P(|X| > 2)$ :

$$P(|X| > 2) = 1 - P(-2 \leq X \leq 2) = 1 - \int_{-2}^2 \frac{1}{10} dx = 1 - \left[ \frac{x}{10} \right]_{-2}^2 = 1 - \left( \frac{2}{10} - \left( \frac{-2}{10} \right) \right) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

- (b) Considere uma série de 4 medições independentes. Determine a probabilidade de no máximo 2 serem classificadas como instáveis, sabendo que pelo menos uma delas apresenta essa condição. (1.0)

Se  $Y$  é o número de medições instáveis em 4 ensaios de Bernoulli(0.6) independentes, tem-se que  $Y \sim \text{Binomial}(n = 4, p = 0.6)$ .

$$P(Y \leq 2 | Y \geq 1) = \frac{P(Y \leq 2, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{F_X(2) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} = \frac{0.5248 - 0.0256}{1 - 0.0256} = \frac{0.4992}{0.9744} \approx 0.5123$$

### Pergunta 4

2 valores

Numa unidade industrial, o tempo de processamento de cada peça numa determinada máquina segue uma distribuição normal com média 15 minutos e desvio padrão de 2 minutos. Suponha que os tempos de processamento de peças diferentes são independentes. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  os tempos de processamento de duas peças escolhidas ao acaso e considere o tempo total  $T = X_1 + X_2$ . Calcule a probabilidade de o tempo total de processamento das duas peças exceder 33 minutos.

A: 0.2266 B: 0.1444 C: 0.9332 D: 0.0668

$T = X_1 + X_2$ : tempo total de processamento das duas peças.

$$\mu_T \equiv E(T) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \stackrel{i.d.}{=} 15 + 15 = 30$$

$$\sigma_T^2 \equiv Var(T) = Var(X_1 + X_2) \stackrel{ind.}{=} Var(X_1) + Var(X_2) \stackrel{i.d.}{=} 2^2 + 2^2 = 8$$

Propriedade reprodutiva da distribuição normal:

Como  $T$  é uma soma de variáveis aleatórias normais independentes,  $T \sim \text{Normal}(\mu_T = 30, \sigma_T^2 = 8)$ .

Cálculo da probabilidade  $P(T > 33)$ :

$$P(T > 26) = P\left(Z > \frac{33-30}{\sqrt{8}}\right) = P(Z > 1.0607) = 1 - F_Z(1.0607) = 1 - 0.8556 = 0.1444$$

onde  $Z = (T - \mu_T) / \sqrt{\sigma_T^2} \sim \text{Normal}(0, 1)$ .

### Pergunta 5

3 valores

Numa unidade de refinação, um engenheiro químico está a monitorizar a eficiência de um novo catalisador num certo tipo de reator. Sabe-se que, devido a variações térmicas microscópicas, o catalisador pode sofrer episódios de desativação pontual e que o número desses episódios por unidade de volume ( $X$ ) segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\mu$ . Com o objectivo de estimar  $\mu$ , o engenheiro recolhe uma amostra aleatória do número de episódios em  $n$  unidades de volume independentes,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

(a) Mostre que o estimador de máxima verosimilhança de  $\mu$  é a média amostral,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ . (1.5)

- Seja  $(X_1, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória de  $X \sim \text{Poisson}(\mu)$ , onde  $X$  é a variável aleatória que representa o número de episódios de desativação pontual por unidade de volume.

- Método da máxima verosimilhança (estimação de  $\mu$ ):

1. Funções de verosimilhança e de log-verosimilhança:

$$L(\mu|\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mu) \stackrel{i.i.d.}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu} \mu^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\mu} \mu^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\ln L(\mu|\mathbf{x}) = -n\mu + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln \mu - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!).$$

2. Maximização de  $\ln L(\mu|\mathbf{x})$ , com  $\hat{\mu}$  a denotar a estimativa de MV de  $\mu$ :

$$\left. \frac{d}{d\mu} \ln L(\mu|\mathbf{x}) \right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\left. \frac{d^2}{d\mu^2} \ln L(\mu|\mathbf{x}) \right|_{\mu=\hat{\mu}} < 0 \Rightarrow -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\mu}^2} < 0 \quad (\hat{\mu} \text{ é ponto de máximo, supondo que } \sum_{i=1}^n x_i > 0)$$

3. Estimador de máxima verosimilhança (EMV) de  $\mu$ :

$$EMV(\mu) = \bar{X} \quad (\text{média amostral}).$$

(b) Numa inspeção a 6 unidades de volume foram encontrados os seguintes episódios de desativação pontual: (2, 4, 3, 1, 4, 1). Qual é a estimativa de máxima verosimilhança de  $P(X \geq 3)$ ? (1.5)

Pretende-se estimar

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-\mu} - \mu e^{-\mu} - \frac{\mu^2}{2} e^{-\mu} = 1 - \left(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2}\right) e^{-\mu}.$$

Usando a amostra (2, 4, 3, 1, 4, 1), com  $n = 6$ , conclui-se que a estimativa de máxima verosimilhança de  $\mu$  é

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{15}{6} = 2.5,$$

e que, pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, a estimativa de máxima verosimilhança de  $P(X \geq 3)$  é

$$\widehat{P(X \geq 3)} = 1 - \left(1 + \hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}^2}{2}\right) e^{-\hat{\mu}} = 1 - \left(1 + 2.5 + \frac{2.5^2}{2}\right) e^{-2.5} \approx 0.4562.$$

#### Pergunta 6

3 valores

Admita que o comprimento de uma componente eletrónica segue uma distribuição normal com desvio-padrão  $\sigma = 0.8$  mm. Pretende-se estimar o comprimento médio populacional,  $\mu$ , através de um intervalo de confiança a 95%.

- (a) Construa um intervalo aleatório de confiança a 95% para  $\mu$ , considerando que  $(X_1, \dots, X_n)$  é uma amostra aleatória do comprimento  $X$  de uma componente eletrónica, com média amostral denotada por  $\bar{X}$ . (1.5)

- Método da variável fulcral (estimação intervalar de  $\mu$ ):

1. Variável fulcral:  $W = \frac{\bar{X} - \mu}{0.8/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .

2. Fixado um grau de confiança  $1 - \alpha = 0.95$ , obtêm-se  $a$  e  $b$  tais que

$$P(a < W < b) = 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow a = -b \text{ e } b = z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

3. Desigualdade equivalente:

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu}{0.8/\sqrt{n}} < 1.96\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{0.8}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 \frac{0.8}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

4. Intervalo aleatório de confiança (IAC) a 95% para  $\mu$ :

$$IAC(\mu; 0.99) : \bar{X} \pm 1.96 \frac{0.8}{\sqrt{n}}$$

- (b) Determine o número mínimo de medições independentes que devem ser realizadas para que a amplitude do intervalo de confiança não seja superior a 0.3 mm. (1.5)

- i) Identificação dos parâmetros e da condição da amplitude:

Dados:  $\sigma = 0.8$  e nível de confiança ao nível  $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$ .

A condição imposta para a amplitude ( $A$ ) é  $A \leq 0.3$ . Sendo a amplitude definida por  $A = 2 z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , temos:

$$2 z_{0.975} \frac{0.8}{\sqrt{n}} \leq 0.3$$

ii) Determinação do quantil e cálculo de  $n$ :

O quantil de ordem  $1 - \alpha/2 = 0.975$  é dado por:  $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ .

Substituindo na inequação:

$$2 \times 1.96 \frac{0.8}{\sqrt{n}} \leq 0.3 \iff \frac{3.136}{\sqrt{n}} \leq 0.3 \iff \sqrt{n} \geq \frac{3.136}{0.3} = 10.453 \implies n \geq (10.453)^2 \approx 109.27$$

Como  $n$  deve ser um número inteiro, o número mínimo de medições é  $n = 110$ .

#### Pergunta 7

2 valores

Considere que o tempo até alívio (em horas) após a toma de certo analgésico segue uma distribuição Exponencial, tendo sido anunciado pelo fabricante, de parâmetro  $\lambda = 1/3$ . A partir de uma amostra independente e identicamente distribuída de 50 pacientes, obteve-se uma média amostral do tempo até alívio após a respetiva toma, de 3.2 horas. Com base nesta amostra avalie as hipóteses  $H_0 : \lambda = 1/3$  versus  $H_1 : \lambda \neq 1/3$ , efetuando um teste de hipóteses estatístico apropriado. Indique o valor- $p$  aproximado do teste.

A: 0.081    B: 0.637    C: 0.319    D: 0.103

- $X$ : Tempo até alívio (em horas), com  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ .
- $(X_1, \dots, X_n)$  amostra aleatória de  $X$  com concretização  $n = 50$  e  $\bar{x} = 3.2$ .
- Para grandes amostras ( $n = 50$ ), pelo T.L.C.,  $\bar{X} \stackrel{a}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1/\lambda^2}{n}\right)$ , i.e.,  $(\bar{X} - \frac{1}{\lambda})/\sqrt{\frac{1/\lambda^2}{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$ .
- Teste de hipóteses:
  1. Hipóteses:  $H_0 : \lambda = 1/3$  versus  $H_1 : \lambda \neq 1/3$ .
  2. Estatística do teste:  $T = \frac{\bar{X}-3}{3/\sqrt{50}} \stackrel{a}{\sim}_{H_0} N(0, 1)$ , com valor observado  $t = \frac{3.2-3}{3/\sqrt{50}} \approx 0.4714$ .
  3. Valor- $p$ :  $P = P(|T| \geq |t| | H_0) \approx 2 \times (1 - F_{N(0,1)}(0.4714)) = 2 \times (1 - 0.6813) = 0.637$ .
  4. Conclusão: Rejeita-se  $H_0$  para o nível de significância  $\alpha > 0.637$  e não se rejeita  $H_0$  no caso contrário ( $\alpha = 1\%$ ,  $5\%$  e  $10\%$ ). Ou seja, há forte evidência a favor da hipótese  $H_0 : \lambda = 1/3$ .

#### Pergunta 8

2 valores

Na indústria aeroespacial, a liga de Alumínio-Lítio (Al-Li) é amplamente utilizada em fuselagens devido à sua baixa densidade e alta resistência à propagação de fissuras. Um engenheiro de materiais está a estudar a relação entre a taxa de crescimento de fissuras por fadiga ( $Y$ , em  $mm/ciclo \times 10^{-4}$ ) e valor da tensão ( $x$ , em  $MPa\sqrt{m}$ ). Após a realização de 25 ensaios laboratoriais independentes, propôs-se ajustar um modelo de regressão linear simples:  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ . Os dados obtidos permitiram apurar os seguintes resultados:

$$n = 25, \quad \bar{x} = 20, \quad \bar{y} = 1.5, \quad \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 400, \quad \hat{\beta}_1 = 0.006, \quad \sum_{i=1}^{25} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.0106$$

Uma componente crítica da asa opera sob um valor de tensão de  $x_0 = 24 MPa\sqrt{m}$ . Por normas de segurança, a taxa média de crescimento de fissuras esperada para este nível de tensão,  $E(Y|x = 24)$ , deve ser inferior a  $1.61 mm/ciclo \times 10^{-4}$  (hipótese alternativa  $H_1$ ). Efectue um teste de hipóteses, ao nível de significância de 0.5%, para verificar se a taxa média de crescimento para  $x_0 = 24$  é segura, ou seja, se é significativamente inferior ao valor crítico de segurança de 1.61.

Admita a validade do modelo e as hipóteses de trabalho convenientes.

- A:**  $-4.17 < -2.807$  e portanto não se rejeita  $H_0$     **B:**  $12.4 > 2.807$  e portanto não se rejeita  $H_0$   
**C:**  $-14.17 < -2.807$  e portanto rejeita-se  $H_0$     **D:**  $30.42 > -2.807$  e portanto não se rejeita  $H_0$

- Modelo e hipóteses de trabalho:  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, 25$ , com  $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .
- Teste de hipóteses:

1. Hipóteses em teste:  $H_0 : E(Y|x = 24) \equiv \mu_{Y|x=24} \geq 1.61 \equiv \mu_{Y|x=24, H_0}$  versus  $H_1 : E(Y|x = 24) < 1.61$ .

2. Estatística de teste:

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - \mu_{Y|x=x_0, H_0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 24 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(\bar{x} - 24)^2}{\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{(n-2)} = t_{(23)}$$

Valor observado da estatística de teste:

cálculos auxiliares:  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1.5 - (0.006 \times 20) = 1.38$ ,  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (y_i - \hat{y}_i)^2}{25-2} = \frac{0.0106}{23}$

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 24 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(\bar{x} - 24)^2}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}\right) \hat{\sigma}^2}} = \frac{1.38 + 0.006 \times 24 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(20-24)^2}{400}\right) \frac{0.0106}{23}}} \approx \frac{-0.086}{0.00607} \approx -14.17$$

3. Região crítica: (Rejeição de  $H_0$  a 0.5%)  $\{T_0 < a\}$  com  $a = F_{t(23)}^{-1}(0.005) = -F_{t(23)}^{-1}(0.995) = -2.807$

4. Conclusão: Como  $t_0 < a$ , rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância de 0.5%. Ou seja, há forte evidência estatística, ao nível de significância de 0.5%, de que, para o nível de tensão operado, a taxa média de crescimento de fissuras está abaixo do valor crítico de segurança.