

Duração: **120** minutos

Exame de Época Normal - Versão A

- As perguntas com múltiplas opções têm apenas uma resposta correta. Caso assinale uma resposta errada ou mais de uma resposta, serão descontados 0.5 valores.
- As respostas às perguntas de escolha única têm de ser assinaladas na folha de instruções distribuída.
- Justificar convenientemente as respostas a todas as restantes perguntas.

Pergunta 1

2 valores

Um sistema em paralelo com 3 componentes do mesmo tipo funciona se pelo menos uma das componentes funcionar. Sabendo que as componentes funcionam (ou não) independentemente umas das outras e que a probabilidade de cada componente funcionar é 0.8, a probabilidade do sistema funcionar é:

A: 0.018 **B:** 0.488 **C:** 0.512 **D:** 0.992

Acontecimentos e probabilidades:

F = sistema funcionar, F_i = componente i funcionar, $P(F_i) = 0.8$, $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = 1 - P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) \stackrel{ind.}{=} 1 - P(\bar{F}_1) \times P(\bar{F}_2) \times P(\bar{F}_3) \\ &= 1 - (1 - P(F_1)) \times (1 - P(F_2)) \times (1 - P(F_3)) \stackrel{iden.}{=} 1 - (1 - 0.8)^3 = 0.992 \end{aligned}$$

Pergunta 2

3 valores

Numa unidade industrial, uma máquina produz peças metálicas em lotes de pequena dimensão. No final de cada lote, é feita uma inspeção de qualidade a 3 características críticas da peça: espessura, diâmetro e acabamento superficial. Com base em dados históricos, sabe-se que o número X de características não conformes detetadas numa peça escolhida ao acaso tem a seguinte função massa de probabilidade:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.72	0.18	0.08	0.02

- (a) Mostre que a variância do número de características não conformes detetadas numa peça é maior do que quer o seu número modal quer o seu número mediano. (1.5)

X : número de características não conformes detetadas numa peça.

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (0.18 + 4 \times 0.08 + 9 \times 0.02) - (0.18 + 2 \times 0.08 + 3 \times 0.02)^2 = 0.68 - 0.4^2 = 0.52$
- $Moda(X) = 0$ pois $\max_x P(X = x) = P(X = 0) = 0.72$
- $Mediana(X) = 0$ pois $F_X(0) = 0.72 \geq 0.5$ e $P(X \geq 0) = 1 \geq 0.5$.

Portanto, $Var(X) > Moda(X) = Mediana(X)$.

- (b) Cada característica não conforme obriga a uma operação adicional de retrabalho com custo de 4 euros, e sempre que a peça apresenta pelo menos 2 características não conformes é ainda necessária uma inspeção final extraordinária com custo adicional de 3 euros. (1.5)
- Seja C o custo adicional de processamento de uma peça escolhida ao acaso. Determine a função de probabilidade de C e calcule o respetivo valor esperado.

C: custo adicional de processamento (em euros).

Note-se que $C = 0$ ($X = 0$), $C = 4$ ($X = 1$), $C = 2 \times 4 + 3 = 11$ ($X = 2$) e $C = 3 \times 4 + 3 = 15$ ($X = 3$).

Função de probabilidade de C:

c	0	4	11	15
$P(C = c)$	0.72	0.18	0.08	0.02

Valor esperado de C:

$$E(C) = 0 \times 0.72 + 4 \times 0.18 + 11 \times 0.08 + 15 \times 0.02 = 0 + 0.72 + 0.88 + 0.30 = 1.90 \text{ euros.}$$

Pergunta 3

3 valores

O erro de cada medição, X (em mm), realizada por um sensor de precisão segue uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[-\alpha, \alpha]$, com $\alpha > 0$. Sabe-se que a variância deste erro é $Var(X) = 3 \text{ mm}^2$. O sensor é classificado como instável se o valor absoluto do erro cometido numa medição for superior a 0.6 mm.

- (a) Determine o valor de α e calcule a probabilidade de uma medição resultar num estado instável. (2.0)

Obtenção do parâmetro α da distribuição uniforme contínua:

$$\text{Se } X \sim U(-\alpha, \alpha), \text{ então } Var(X) = \frac{(\alpha - (-\alpha))^2}{12} = \frac{(2\alpha)^2}{12} = \frac{\alpha^2}{3}.$$

$$\text{Como } Var(X) = 3, \text{ então } \frac{\alpha^2}{3} = 3 \iff \alpha^2 = 9 \implies \alpha = 3.$$

Cálculo da probabilidade de uma medição resultar num estado instável, i.e., $P(|X| > 0.6)$:

$$P(|X| > 0.6) = 1 - P(-0.6 \leq X \leq 0.6) = 1 - \int_{-0.6}^{0.6} \frac{1}{6} dx = 1 - \left[\frac{x}{6} \right]_{-0.6}^{0.6} = 1 - \left(\frac{0.6}{6} - \left(\frac{-0.6}{6} \right) \right) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

- (b) Considere uma série de 4 medições independentes. Determine a probabilidade de pelo menos 3 serem classificadas como instáveis, sabendo que pelo menos uma delas apresenta essa condição. (1.0)

Se Y é o número de medições instáveis em 4 ensaios de Bernoulli(0.8) independentes, tem-se que $Y \sim \text{Binomial}(n = 4, p = 0.8)$.

$$P(Y \geq 3 | Y \geq 1) = \frac{P(Y \geq 3, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{P(Y \geq 3)}{P(Y \geq 1)} = \frac{1 - F_X(2)}{1 - F_X(0)} = \frac{1 - 0.1808}{1 - 0.0016} = \frac{0.8192}{0.9984} \approx 0.8205$$

Pergunta 4

2 valores

Numa unidade industrial, o tempo de processamento de cada peça numa determinada máquina segue uma distribuição normal com média 12 minutos e desvio padrão de 1.5 minutos. Suponha que os tempos de processamento de peças diferentes são independentes. Sejam X_1 e X_2 os tempos de processamento de duas peças escolhidas ao acaso.

Calcule a probabilidade de o tempo total de processamento das duas peças exceder 26 minutos.

A: 0.1729 B: 0.2524 C: 0.1241 D: 0.8759

$T = X_1 + X_2$: tempo total de processamento das duas peças.

$$\mu_T \equiv E(T) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \stackrel{i.d.}{=} 12 + 12 = 24$$

$$\sigma_T^2 \equiv Var(T) = Var(X_1 + X_2) \stackrel{ind.}{=} Var(X_1) + Var(X_2) \stackrel{i.d.}{=} 1.5^2 + 1.5^2 = 4.5$$

Propriedade reprodutiva da distribuição normal:

Como T é uma soma de variáveis aleatórias normais independentes, $T \sim \text{Normal}(\mu_T = 24, \sigma_T^2 = 4.5)$.

Cálculo da probabilidade $P(T > 26)$:

$$P(T > 26) = P\left(Z > \frac{26 - 24}{\sqrt{4.5}}\right) = P(Z > 0.9428) = 1 - F_Z(0.9428) = 1 - 0.8271 = 0.1729$$

onde $Z = (T - \mu_T) / \sqrt{\sigma_T^2} \sim \text{Normal}(0, 1)$.

Pergunta 5

3 valores

Numa unidade de refinação, um engenheiro químico está a monitorizar a eficiência de um novo catalisador num certo tipo de reator. Sabe-se que, devido a variações térmicas microscópicas, o catalisador pode sofrer episódios de desativação pontual e que o número desses episódios por unidade de volume (X) segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ . Com o objectivo de estimar λ , o engenheiro recolhe uma amostra aleatória do número de episódios em n unidades de volume independentes, $X_1, X_2, \dots, X_n$.

(a) Mostre que o estimador de máxima verosimilhança de λ é a média amostral, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$. (1.5)

- Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, onde X é a variável aleatória que representa o número de episódios de desativação pontual por unidade de volume.

- Método da máxima verosimilhança (estimação de λ):

1. Funções de verosimilhança e de log-verosimilhança:

$$L(\lambda|\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\lambda) \stackrel{i.i.d.}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$\ln L(\lambda|\mathbf{x}) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!).$$

2. Maximização de $\ln L(\lambda|\mathbf{x})$, com $\hat{\lambda}$ a denotar a estimativa de MV de λ :

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda|\mathbf{x}) \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\left. \frac{d^2}{d\lambda^2} \ln L(\lambda|\mathbf{x}) \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} < 0 \Rightarrow -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}^2} < 0 \quad (\hat{\lambda} \text{ é ponto de máximo, supondo que } \sum_{i=1}^n x_i > 0)$$

3. Estimador de máxima verosimilhança (EMV) de λ :

$$EMV(\lambda) = \bar{X} \quad (\text{média amostral}).$$

(b) Numa inspeção a 5 unidades de volume foram encontrados os seguintes episódios de desativação pontual: (2, 4, 3, 1, 5). Qual é a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X \geq 3)$? (1.5)

Pretende-se estimar

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = 1 - \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) e^{-\lambda}.$$

Usando a amostra (2, 4, 3, 1, 5), com $n = 5$, conclui-se que a estimativa de máxima verosimilhança de λ é

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{15}{5} = 3,$$

e que, pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X \geq 3)$ é

$$\widehat{P(X \geq 3)} = 1 - \left(1 + \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda}^2}{2}\right) e^{-\hat{\lambda}} = 1 - \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2}\right) e^{-3} \approx 0.5768.$$

Pergunta 6

3 valores

Admita que o comprimento de uma componente eletrónica segue uma distribuição normal com desvio-padrão $\sigma = 0.5$ mm. Pretende-se estimar o comprimento médio populacional, μ , através de um intervalo de confiança a 99%.

- (a) Construa um intervalo aleatório de confiança a 99% para μ , considerando que $(X_1, \dots, X_n)$ é uma amostra aleatória do comprimento X de uma componente eletrónica, com média amostral denotada por $\bar{X}$. (1.5)

- Método da variável fulcral (estimação intervalar de μ):

1. Variável fulcral: $W = \frac{\bar{X} - \mu}{0.5/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

2. Fixado um grau de confiança $1 - \alpha = 0.99$, obtêm-se a e b tais que

$$P(a < W < b) = 1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow a = -b \text{ e } b = z_{0.995} = \Phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$$

3. Desigualdade equivalente:

$$P\left(-2.576 < \frac{\bar{X} - \mu}{0.5/\sqrt{n}} < 2.576\right) = 0.99 \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 2.576 \frac{0.5}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2.576 \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

4. Intervalo aleatório de confiança (IAC) a 99% para μ :

$$IAC(\mu; 0.99) : \bar{X} \pm 2.576 \frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

- (b) Determine o número mínimo de medições independentes que devem ser realizadas para que a amplitude do intervalo de confiança não seja superior a 0.2 mm. (1.5)

- i) Identificação dos parâmetros e da condição da amplitude:

Dados: $\sigma = 0.5$ e nível de confiança ao nível $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01$.

A condição imposta para a amplitude (A) é $A \leq 0.2$. Sendo a amplitude definida por $A = 2 z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, temos:

$$2 z_{0.995} \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.2$$

ii) Determinação do quantil e cálculo de n :

O quantil de ordem $1 - \alpha/2 = 0.995$ é dado por: $z_{0.995} = \Phi^{-1}(0.995) \approx 2.576$.

Substituindo na inequação:

$$2 \times 2.576 \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \iff \frac{2.576}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \iff \sqrt{n} \geq \frac{2.576}{0.2} = 12.88 \implies n \geq (12.88)^2 \approx 165.89$$

Como n deve ser um número inteiro, o número mínimo de medições é $n = 166$.

Pergunta 7

2 valores

Considere que o tempo até alívio (em horas) após a toma de certo analgésico segue uma distribuição Exponencial, tendo sido anunciado pelo fabricante, de parâmetro $\lambda = 0.5$. A partir de uma amostra (independente e identicamente distribuída) de 50 pacientes, obteve-se uma média amostral do tempo até alívio após a respetiva toma, de 2.3 horas. Com base nesta amostra avalie as hipóteses $H_0 : \lambda = 0.5$ versus $H_1 : \lambda \neq 0.5$, efetuando um teste estatístico apropriado. Indique o valor- p aproximado do teste.

A: 0.011 B: 0.145 C: 0.289 D: 0.881

- X : Tempo até alívio (em horas), com $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.
- $(X_1, \dots, X_n)$ amostra aleatória de X com concretização $n = 50$ e $\bar{x} = 2.3$.
- Para grandes amostras ($n = 50$), pelo T.L.C., $\bar{X} \stackrel{a}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1/\lambda^2}{n}\right)$, i.e., $(\bar{X} - \frac{1}{\lambda})/\sqrt{\frac{1/\lambda^2}{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$.
- Teste de hipóteses:
 1. Hipóteses: $H_0 : \lambda = 0.5$ versus $H_1 : \lambda \neq 0.5$.
 2. Estatística do teste: $T = \frac{\bar{X} - 2}{2/\sqrt{50}} \stackrel{a}{\sim}_{H_0} N(0, 1)$, com valor observado $t = \frac{2.3 - 2}{2/\sqrt{50}} \approx 1.06066$.
 3. Valor- p : $P = P(|T| \geq |t| | H_0) \approx 2 \times (1 - F_{N(0,1)}(1.06066)) = 2 \times (1 - 0.8556) = 0.289$.
 4. Conclusão: Rejeita-se H_0 para o nível de significância $\alpha > 0.289$ e não se rejeita H_0 no caso contrário ($\alpha = 1\%$, 5% e 10%). Ou seja, há forte evidência a favor da hipótese $H_0 : \lambda = 0.5$.

Pergunta 8

2 valores

Na indústria aeroespacial, a liga de Alumínio-Lítio (Al-Li) é amplamente utilizada em fuselagens devido à sua baixa densidade e alta resistência à propagação de fissuras. Um engenheiro de materiais está a estudar a relação entre a taxa de crescimento de fissuras por fadiga (Y , em $mm/ciclo \times 10^{-4}$) e valor da tensão (x , em $MPa\sqrt{m}$). Após a realização de 25 ensaios laboratoriais independentes, propôs-se ajustar um modelo de regressão linear simples: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Os dados obtidos permitiram apurar os seguintes resultados:

$$n = 25, \quad \bar{x} = 20, \quad \bar{y} = 1.5, \quad \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 400, \quad \hat{\beta}_1 = 0.006, \quad \sum_{i=1}^{25} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.0106$$

Uma componente crítica da asa opera sob um valor de tensão de $x_0 = 22 MPa\sqrt{m}$. Por normas de segurança, a taxa média de crescimento de fissuras esperada para este nível de tensão, $E(Y|x = 22)$, deve ser inferior a $1.61 mm/ciclo \times 10^{-4}$ (hipótese alternativa H_1). Efectue um teste de hipóteses, ao nível de significância de 0.5%, para verificar se a taxa média de crescimento para $x_0 = 22$ é segura, ou seja, se é significativamente inferior ao valor crítico de segurança de 1.61.

Admita a validade do modelo e as hipóteses de trabalho convenientes.

A: $-20.42 < -2.807$ e portanto rejeita-se H_0 **B:** $12.4 > 2.807$ e portanto não se rejeita H_0
C: $-2.02 < 2.807$ e portanto rejeita-se H_0 **D:** $30.42 > -2.807$ e portanto não se rejeita H_0

- Modelo e hipóteses de trabalho: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, 25$, com $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- Teste de hipóteses:

1. Hipóteses em teste: $H_0 : E(Y|x = 22) \equiv \geq 1.61 \equiv \mu_{Y|x=22, H_0}$ versus $H_1 : E(Y|x = 22) < 1.61$.

2. Estatística de teste:

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - \mu_{Y|x=x_0, H_0}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 22 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(\bar{x} - 22)^2}{\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\bar{x}^2}\right) \hat{\sigma}^2}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{(n-2)} = t_{(23)}$$

Valor observado da estatística de teste:

cálculos auxiliares: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1.5 - (0.006 \times 20) = 1.38$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (y_i - \hat{y}_i)^2}{25 - 2} = \frac{0.0106}{23}$

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 22 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(\bar{x} - 22)^2}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}\right) \hat{\sigma}^2}} = \frac{1.38 + 0.006 \times 22 - 1.61}{\sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{(20 - 22)^2}{400}\right) \frac{0.0106}{23}}} \approx \frac{-0.098}{0.0048} \approx -20.42$$

3. Região crítica: (Rejeição de H_0 a 0.5%) $\{T_0 < a\}$ com $a = F_{t(23)}^{-1}(0.005) = -F_{t(23)}^{-1}(0.995) = -2.807$

4. Conclusão: Como $t_0 < a$, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0.5%. Ou seja, há forte evidência estatística, ao nível de significância de 0.5%, de que, para o nível de tensão operado, a taxa média de crescimento de fissuras está abaixo do valor crítico de segurança.