

Duração: **120** minutos

Exame de Época Normal — A

- As questões de escolha múltipla têm uma e apenas uma resposta correta. Caso assinale uma resposta errada ou mais de uma resposta, serão descontados 0.5 valores.
- As respostas às questões de escolha múltiplas têm de ser assinaladas na folha de instruções previamente distribuída.
- Para as restantes questões, terá de justificar convenientemente as suas respostas.
- Só pode sair da sala uma hora após o início do exame, devendo nesse caso entregar a sua prova ou desistir da mesma.

Pergunta 1

2 valores

Um sistema de comunicação, com redundância e constituído por três canais (1, 2 e 3), está funcional se pelo menos um destes três canais estiver operacional. Cada um dos canais tem probabilidade 0.9 de estar operacional e os canais estão operacionais (ou não) independentemente uns dos outros.

Calcule a probabilidade de este sistema estar funcional. **A:** 0.270 **B:** 0.001 **C:** 0.999 **D:** 0.730

• **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
A_1 = canal 1 está operacional	$P(A_1) = 0.9$
A_2 = canal 2 está operacional	$P(A_2) = 0.9$
A_3 = canal 3 está operacional	$P(A_3) = 0.9$

• **Prob. pedida**

Ao admitirmos que os eventos A_1 , A_2 e A_3 são mutuamente independentes e $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$, a probabilidade do sistema de comunicação estar funcional é dada por

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
 &= 3 \times P(A_1) - 3 \times [P(A_1)]^2 + [P(A_1)]^3 \\
 &= 3 \times 0.9 - 3 \times 0.9^2 + 0.9^3 \\
 &= 0.999.
 \end{aligned}$$

[Alternativamente e invocando que os acontecimentos A_1 , A_2 e A_3 são mutuamente independentes, temos $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(\bar{A}_3) = 1 - [1 - P(A_1)] \times [1 - P(A_2)] \times [1 - P(A_3)] = 1 - (1 - 0.9)^3 = 0.999.$]

Pergunta 2

2 valores

Uma empresa de engenharia desenvolve sensores eletrónicos para os quais a variável aleatória X , que representa o número de ciclos de operação até à falha, tem função de distribuição dada por $P(X \leq x) = 1 - 0.98^x$, para $x \in \mathbb{N}$, ou seja, $X \sim \text{geométrica}(p = 0.02)$.

Sabendo que um sensor já funcionou 200 ciclos sem falhar, qual é a probabilidade de o mesmo sensor só vir a falhar após um número adicional de ciclos de operação superior a 100?

- **V.a. e f.p.**

X = número de ciclos de operação até à falha do sensor

$X \sim \text{geométrica}(0.02)$

$$P(X = x) = 0.98^{x-1} \times 0.02, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n=1}^x P(X = n) = 1 - (1 - p)^x = 1 - (1 - 0.02)^x = 1 - 0.98^x, \quad x \in \mathbb{N}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 200 + 100 \mid X > 200) &= P(X > 100) \\ &= 1 - P(X \leq 100) \\ &= 1 - F_X(100) \\ &= 1 - [1 - (1 - 0.02)^{100}] \\ &= 0.98^{100} \\ &\approx 0.1326, \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade se usou a propriedade de falta de memória da distribuição geométrica. [Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(X > 200 + 100 \mid X > 200) &= \frac{P(X > 200 + 100, X > 200)}{P(X > 200)} = \frac{P(X > 200 + 100)}{1 - P(X \leq 200)} = \frac{1 - F_X(200 + 100)}{1 - F_X(200)} \\ &= \frac{1 - [1 - (1 - p)^{200+100}]}{1 - [1 - (1 - p)^{200}]} = \frac{(1 - p)^{200+100}}{(1 - p)^{200}} = (1 - 0.02)^{100} \approx 0.1326 \\ &\equiv 1 - F_X(100).] \end{aligned}$$

Pergunta 3

2 valores

Suponha que a variável aleatória X representa a temperatura num túnel de vento e possui distribuição normal tal que: o seu quantil de probabilidade 0.5 é igual a 1; e a probabilidade de se obter valores de X superiores a -2 é igual a 0.7.

Obtenha $E(2X^2)$.

- **V.a.**

X = temperatura num túnel de vento

$X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, onde

$$\begin{aligned} (\mu, \sigma^2) : \quad &\begin{cases} F_X^{-1}(0.5) = 1 \\ P(X > -2) = 0.7 \end{cases} \\ &\begin{cases} me(X) = \mu = 1 \\ 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{-2 - \mu}{\sigma}\right) = 0.7 \end{cases} \\ &\begin{cases} \mu = 1 \\ \Phi\left(\frac{-2 - 1}{\sigma}\right) = 1 - 0.7 \end{cases} \\ &\begin{cases} \mu = 1 \\ \frac{-3}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - 0.7) = -\Phi^{-1}(0.7) \stackrel{\text{calc. tabelas}}{=} 0.5244 \end{cases} \\ &\begin{cases} \mu = 1 \\ \sigma = \frac{-3}{-0.5244} \approx 5.7208. \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$E(2X^2) = 2E(X^2) = 2 \times [V(X) + E^2(X)] = 2 \times (\sigma^2 + \mu^2) = 2 \times (5.7208^2 + 1^2) = 67.4551.$$

Pergunta 4

2 valores

Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam o atraso à partida e à chegada (em horas e arredondado para valores inteiros) de certo voo de longo curso de uma companhia aérea. Os registos da companhia mostram que a função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada pela tabela à direita.

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.0	0.3
2	0.1	0.1	0.0

Calcule a variância de $(Y | X = 0)$.

• **Par aleatório**

(X, Y) , X = atraso à partida, Y = atraso à chegada

• **V.a. de interesse e f.p.**

$(Y | X \geq 0)$

Dado que $P(X = 0) = \sum_y P(X = 0, Y = y) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$, segue-se

$$P(Y = y | X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = y)}{P(X = 0)} = \begin{cases} \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}, & y = 0, 2 \\ \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}, & y = 1 \\ 0, & \text{outros valores de } y. \end{cases}$$

• **Valor esperado e 2o. momento de $Y | X = 0$**

$$E(Y | X = 0) = \sum_{y=0}^2 y \times P(Y = y | X = 0) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y^2 | X = 0) = \sum_{y=0}^2 y^2 \times P(Y = y | X = 0) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

• **Variância pedida**

$$V(Y | X = 0) = E(Y^2 | X = 0) - E^2(Y | X = 0) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Pergunta 5

2 valores

Um sistema automático deteta uma peça defeituosa com probabilidade $p = 0.85$, de forma independente de peça para peça. Admita que o controlo de qualidade é realizado em quatro fases independentes nas quais são inspeccionadas 3, 4, 2 e 3 peças, respectivamente.

A probabilidade exata de que o número de defeitos detectados no conjunto das quatro fases da inspeção não exceda nove é

A: 0.0922 B: 0.9078 C: 0.2642 D: 0.7358

• **V.a.**

X_i = número de defeitos detectados na fase i da inspeção

• **Distribuição e f.p.**

$X_i \stackrel{indep.}{\sim} \text{binomial}(n_i, p)$, onde $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 2, n_4 = 3, p = 0.85$

• **V.a. de interesse**

$X = \sum_{i=1}^4 X_i$ = número total de defeitos detectados no conjunto das quatro fases das inspeções

• **Distribuição**

Como cada fase é independente e segue uma distribuição binomial com a mesma probabilidade de sucesso, a propriedade de reprodutividade da distribuição binomial permite-nos concluir que

$$X = \sum_{i=1}^4 X_i \sim \text{binomial} \left(n = \sum_{i=1}^4 n_i = 12, p = 0.85 \right).$$

• **Prob. pedida**

$$P(X \leq 9) = F_X(9) \stackrel{calc.}{\simeq} 0.2642.$$

[Alternativamente, considere-se $Y = 12 - X$. Então: $X = Y - 12$; $Y \sim \text{binomial}(12, p = 0.15)$; e a prob. pedida é $P(X \leq 9) = P(12 - Y \leq 9) = P(Y \geq 12 - 9) = 1 - P(Y \leq 2) \stackrel{tabelas/calcul.}{\simeq} 1 - 0.7358 = 0.2642$.]

Pergunta 6

2 valores

Suponha que X representa o tempo até falha (em 10^3 horas) de um dispositivo elétrico sujeito a falhas repentinas e possui função de densidade de probabilidade e função de distribuição dadas, respetivamente, por

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{2x}}}{\sqrt{2\pi} x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad F_X(x) = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma}{x}}\right),$$

para $x > 0$, onde σ é uma constante positiva desconhecida e Φ denota a função de distribuição da normal padrão.

A estimativa de máxima verosimilhança de $P(X \leq 1)$, aproximada às milésimas e baseada numa amostra casual $(x_1, \dots, x_n)$ de dimensão $n = 10$ e tal que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \simeq 3.7971$, é igual a

A: 0.851 B: 0.425 C: 0.105 D: 0.052

• **V.a. de interesse e f.d.p.**

X = tempo até falha (em milhares de horas) de um dispositivo mecânico sujeito a falhas repentinas

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{2x}}}{\sqrt{2\pi} x^{\frac{3}{2}}}, \quad x > 0$$

• **Amostra**

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n): \quad n = 10, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \simeq 282.6.$$

• **Parâmetro desconhecido**

$$\sigma \quad (\sigma > 0)$$

• **Obtenção da estimativa de MV de σ**

Passo 1 — Função de verosimilhança

$$\begin{aligned} L(\sigma | \underline{x}) &= f_{\underline{X}}(\underline{x}) \stackrel{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\sqrt{\sigma} e^{-\frac{\sigma}{2x_i}}}{\sqrt{2\pi} x_i^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Passo 2 — Função de log-verosimilhança

$$\ln L(\sigma | \underline{x}) = \frac{n}{2} \ln(\sigma) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Passo 3 — Maximização

A estimativa de MV de σ é representada por $\hat{\sigma}$ e

$$\hat{\lambda} : \begin{cases} \frac{d \ln L(\sigma|x)}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\hat{\sigma}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \frac{d^2 \ln L(\sigma|x)}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=\hat{\sigma}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{2\hat{\sigma}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \\ -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \\ -\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^2 & \text{(prop. verdadeira)} \end{cases}$$

Passo 4 — Estimativa de MV de σ

$$\hat{\sigma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \simeq \frac{10}{3.7971} \simeq 2.633589$$

- **Outro parâmetro desconhecido**

$$h(\sigma) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 2 - 2\Phi(\sqrt{\sigma})$$

- **Estimativa de MV de $h(\sigma)$**

Ao invocar a propriedade de invariância dos EMV, concluímos que a estimativa de MV de $h(\sigma)$ é

$$\begin{aligned} \widehat{h(\sigma)} &= h(\hat{\sigma}) \\ &= 2 - 2\Phi(\sqrt{\hat{\sigma}}) \\ &\simeq 2 - 2\Phi(\sqrt{2.633589}) \\ &\simeq 2 - 2\Phi(1.62) \\ &\stackrel{\text{tabelas, calc.}}{\simeq} 0.105. \end{aligned}$$

Pergunta 7

2 valores

Para avaliar a qualidade de *microchips* produzidos numa fábrica de semicondutores, uma engenheira de produção selecionou aleatoriamente 400 *microchips*, tendo verificado que 12 deles não cumpriam os requisitos pretendidos.

Determine um intervalo de confiança aproximado a 98% para a probabilidade p de um *microchip* não cumprir os requisitos pretendidos.

- **V.a. de interesse**

$$X = \begin{cases} 1, & \text{microchip não cumpre os requisitos pretendidos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Situação**

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

p DESCONHECIDO

- **Obtenção de IC aproximado para p**

Passo 1 — Seleção da v.a. fulcral para p

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{normal}(0, 1)$$

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

Como $(1 - \alpha) \times 100\% = 98\% \Leftrightarrow \alpha = 0.02$, lidaremos com os quantis seguintes:

$$\begin{cases} a_\alpha = -b_\alpha \\ b_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0.99) \stackrel{tabela/calcul.}{=} 2.3263. \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) \simeq 1 - \alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq (\bar{X} - p) / \sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})/n} \leq b_\alpha\right] \simeq 1 - \alpha$$

$$P\left[\bar{X} - b_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} - a_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}}\right] \simeq 1 - \alpha$$

Passo 4 — Concretização

A expressão geral do intervalo aproximado de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para p é

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(p) \simeq \left[\bar{x} \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \times \sqrt{\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{n}} \right].$$

Ao termos em conta que $n = 400$, $\alpha = 0.02$, $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 2.3263$ e $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{12}{400} = 0.03$,

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(p) &\simeq \left[0.03 - 2.3263 \times \sqrt{\frac{0.03 \times (1 - 0.03)}{400}}, 0.03 + 2.3263 \times \sqrt{\frac{0.03 \times (1 - 0.03)}{400}} \right] \\ &\simeq [0.0102, 0.0498]. \end{aligned}$$

Pergunta 8

2 valores

Numa fábrica de produtos químicos, o processo de produção de um determinado composto envolve a medição da temperatura de reação. A temperatura esperada ideal para a reação é de 80 °C; no entanto, devido a variações no processo, a temperatura real pode variar. Uma amostra casual de 30 medições de temperatura foi recolhida, tendo-se obtido $\bar{x} = 81.5$ e $s^2 = 59.741$.

Suponha que a temperatura de reação possui distribuição normal, com valor esperado μ e desvio padrão σ desconhecidos, e confronte as hipóteses $H_0 : \mu = 80$ e $H_1 : \mu \neq 80$ a um nível de significância de 5%.

- V.a. de interesse**

X = temperatura de reação

- Situação**

$X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$

μ desconhecido

σ DESCONHECIDO

- Hipóteses**

$H_0 : \mu = \mu_0 = 80$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Nível de significância**

$\alpha_0 = 0.05$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim_{H_0} t_{(n-1)}$$

- **Região de rejeição de H_0**

O teste é bilateral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), logo a região de rejeição de H_0 é do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, com $c : P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0) = \alpha_0$, ou seja,

$$c = F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha_0/2) = F_{t_{29}}^{-1}(0.975) = 2.045.$$

- **Decisão**

Atendendo ao valor da média e variância corrigida amostrais, $\bar{x} = 81.5$ e $s^2 = 59.741$, o valor observado da estatística de teste é igual a

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \simeq \frac{81.5 - 80}{\sqrt{59.741/30}} \simeq 1.063.$$

Como $t \notin W = (-\infty, -2.045) \cup (2.045, +\infty)$ há evidência para não rejeitar H_0 ao n.s. de $\alpha_0 = 5\%$ [ou a qualquer outro n.s. inferior a α_0].

Pergunta 9

2 valores

Conjetura-se que a proporção de calcopirite (um minério de cobre) nas rochas de uma região possui função de distribuição $F_0(x)$, para $0 < x < 1$ (hipótese H_0). Para avaliar essa conjetura, mediu-se a proporção de calcopirite em 60 amostras de rocha recolhidas casualmente por toda a região e agruparam-se os valores obtidos em 6 intervalos equiprováveis sob H_0 , o que produziu o seguinte conjunto de frequências observadas: 10, 8, 7, 9, 11, 15.

O valor-p aproximado e arredondado às centésimas do procedimento adequado para testar a referida conjetura é igual a

A: 0.55 B: 0.66 C: 0.45 D: 0.41

- **V.a. de interesse**

X = proporção de calcopirite na rocha

- **Hipóteses**

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x), \quad x \in (0, 1)$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_0(x), \text{ para algum } x \in (0, 1)$$

- **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi_{(k-1)}^2$$

onde: k = número de classes = 6; O_i = frequência absoluta observável da classe i ; E_i = frequência absoluta esperada, sob H_0 , da classe i .

- **Região de rejeição de H_0** (para valores de T)

Ao efectuarmos um teste de ajustamento do qui-quadrado, a região de rejeição de H_0 é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$.

- **Valor-p aproximado**

Importa notar que: $\sum_{i=1}^k o_i = 10 + 8 + 7 + 9 + 11 + 15 = n = 60$; $E_i = np_i^0 = 60 \times \frac{1}{6} = 10$, dado que as seis classes são equiprováveis sob H_0 .

Assim sendo, o valor observado da estatística de teste é

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(15-10)^2}{10} \\ &= 0 + 0.4 + 0.9 + 0.1 + 0.1 + 2.5 \\ &[= \frac{k}{n} \left(\sum_{i=1}^k o_i^2 \right) - n] \\ &= 4. \end{aligned}$$

Atendendo a que a região de rejeição de H_0 é um intervalo à direita num teste de ajustamento do qui-quadrado, temos

$$valor - p = P(T > t | H_0) \approx 1 - F_{\chi^2_{(6-1)}}(4) \stackrel{calc.}{\approx} 0.5494 \approx 0.55.$$

Por consequência, a resposta, das quatro apresentadas, que se coaduna com o valor referido acima é **A: 0.55.**

[Mais, devemos decidir pela: rejeição de H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > 52.8264\%$; não rejeição de H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 52.8264\%$, nomeadamente aos n.u.s. (1%, 5%, 10%).]

[Alternativamente, a consulta das tabelas dos quantis de probabilidade da distribuição do qui-quadrado com $k - 1 = 5$ graus de liberdade permitem concluir que

$$\begin{aligned} F_{\chi^2_{(6-1)}}^{-1}(0.40) = 3.656 &< 4 < 4.351 = F_{\chi^2_{(6-1)}}^{-1}(0.50) \\ 0.50 = 1 - 0.50 &< 1 - F_{\chi^2_{(6-1)}}(4) < 1 - 0.40 = 0.60. \end{aligned}$$

Logo, devemos: rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq 60\%$; não rejeitar de H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 50\%$, nomeadamente aos n.u.s. (1%, 5%, 10%). Deste modo, a resposta correcta é **A: 0.55.]**

Pergunta 10

2 valores

Numa fábrica de processamento químico, pretende-se estudar a relação entre a temperatura de reação (x) e uma medida importante para otimizar o processo, a taxa de conversão de um reagente (Y). Recolheram-se de forma aleatória dados experimentais conducentes aos seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2226.3, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 261\,933.50, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 1002.9, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 119\,417.00, \quad \hat{\sigma}^2 \approx 15.918756.$$

Admitindo a validade do modelo de regressão linear simples, $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, e as hipóteses de trabalho convenientes, obtenha um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro β_0 .

- **[Modelo de RLS e hipóteses de trabalho**

Y = taxa de conversão (v.a. resposta)

x = temperatura (variável explicativa)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{normal}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n]$$

- **Obtenção do IC a 95% para β_0**

Passo 1 — V.a. fulcral para β_0

$$Z = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{se(\hat{\beta}_0)} \sim t_{(n-2)}, \quad \text{onde} \quad se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \right]}$$

Passo 2 — Quantis de probabilidade

$$\begin{cases} a_\alpha = -b_\alpha \\ b_\alpha = F_{t_{(n-2)}}^{-1}(1 - \alpha/2) = F_{t_{(20-2)}}^{-1}(1 - 0.025/2) \stackrel{tabela/calc.}{=} 2.101 \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $-b_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{se(\hat{\beta}_0)} \leq b_\alpha\right] = 1 - \alpha$$

$$P[\hat{\beta}_0 - b_\alpha \times se(\hat{\beta}_0) \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 - a_\alpha \times se(\hat{\beta}_0)] = 1 - \alpha$$

Passo 4 — Concretização

Temos

- $n = 20$

- $\sum_{i=1}^n x_i = 2226.3$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2226.3}{20} = 111.315$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 261933.50$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 = 261933.50 - 20 \times 111.315^2 = 14112.9155$$

- $\sum_{i=1}^n y_i = 1002.9$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1002.9}{20} = 50.145$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 54864.92$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 = 54864.92 - 20 \times 50.145^2 = 4574.4995$$

- $\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 119417.00 - 20 \times 111.315 \times 50.145 = 7779.1865$

- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{7779.1865}{14112.9155} \simeq 0.551210$

- $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \times \bar{x} \simeq 50.145 - 0.551210 \times 111.315 = -11.212941,$

bem como $\hat{\sigma}^2 \simeq 15.918756$. E a expressão geral do $IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\beta_0)$ é dada por $[\hat{\beta}_0 \pm b_\alpha \times se(\hat{\beta}_0)]$.
Donde,

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\beta_0) &= \left[-11.212941 \pm 2.101 \times \sqrt{15.918756 \times \left(\frac{1}{20} + \frac{111.315^2}{14112.9155} \right)} \right] \\ &\simeq [-11.212941 - 2.101 \times 3.843499, -11.212941 + 2.101 \times 3.843499] \\ &\simeq [-19.288132, -3.137750]. \end{aligned}$$