

Duração: 120 minutos

Exame de época de recurso

- As questões de escolha múltipla têm uma e apenas uma resposta correta. Caso assinala uma resposta errada ou mais de uma resposta, serão descontados 0.5 valores.
- As respostas às questões de escolha múltiplas têm de ser assinaladas na folha de instruções previamente distribuída.
- Para as restantes questões, terá de justificar convenientemente as suas respostas.
- Só pode sair da sala uma hora após o início do exame, devendo nesse caso entregar a sua prova ou desistir da mesma.

Pergunta 1

2 valores

Um sistema de iluminação residencial depende de três componentes A, B e C, que estão dispostas em paralelo e funcionam de forma mutuamente independente. A probabilidade de que a componente A funcione é 0.95; esta probabilidade é igual 0.97 e 0.99 para as componentes B e C (respetivamente).

Uma vez que este sistema funciona desde que pelo menos uma das suas componentes funcione, qual é a probabilidade de funcionamento deste sistema?

• Quadro de acontecimentos e probabilidades

Acontecimento	Probabilidade
A = componente A está a funcionar	$P(A) = 0.95$
B = componente B está a funcionar	$P(B) = 0.97$
C = componente C está a funcionar	$P(C) = 0.99$

• Prob. pedida

Ao admitirmos que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, a probabilidade deste sistema em paralelo funcionar é dada por

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \times P(B) - P(A) \times P(C) - P(B) \times P(C) + P(A) \times P(B) \times P(C) \\&= 0.95 + 0.97 + 0.99 - 0.95 \times 0.97 - 0.95 \times 0.99 - 0.97 \times 0.99 + 0.95 \times 0.97 \times 0.99 \\&= 0.999985.\end{aligned}$$

[Alternativamente e invocando que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, temos $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C}) = 1 - [1 - P(A)] \times [1 - P(B)] \times [1 - P(C)] = 1 - (1 - 0.95) \times (1 - 0.97) \times (1 - 0.99) = 0.999985.$]

Pergunta 2

2 valores

Uma empresa organiza regularmente sessões de apresentação de novos produtos para as quais convida grupos de 20 clientes selecionados ao acaso. Admita que a probabilidade de qualquer cliente assistir a uma sessão para a qual foi convidado é igual a 0.6.

Sabendo que dez minutos antes da hora marcada para o início da sessão há 4 pessoas na sala, calcule a probabilidade de que menos de 10 clientes venham a assistir a essa sessão.

A: 0.1275 B: 0.7514 C: 0.2446 D: 0.1262

• **V.a.**

X = número assistentes a uma sessão, em 20 convidados selecionados ao acaso

• **Distribuição e f.p.**

$X \sim \text{binomial}(n = 20, p = 0.6)$

$$P(X = x) = \binom{20}{x} 0.6^x (1 - 0.6)^{18-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 20$$

• **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X < 10 | X \geq 4) &= \frac{P(4 \leq X < 10)}{P(X \geq 4)} = \frac{P(3 < X \leq 9)}{1 - P(X \leq 3)} = \frac{F_X(9) - F_X(3)}{1 - F_X(3)} \stackrel{\text{calc.}}{\simeq} \frac{0.127521 - 0.000047}{1 - 0.000047} \\ &\simeq 0.1275. \end{aligned}$$

[Alternativamente, pode recorrer-se aos resultados $Y = n - X \sim \text{binomial}(n = 20, 1 - p = 0.4)$ e $F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y = n - X \geq n - x) = 1 - P(Y \leq n - x - 1) = 1 - F_Y(n - x - 1)$ e concluir que

$$\begin{aligned} P(X < 10 | X \geq 4) &= \frac{F_X(9) - F_X(3)}{1 - F_X(3)} = \frac{[1 - F_Y(20 - 9 - 1)] - [1 - F_Y(20 - 3 - 1)]}{1 - [1 - F_Y(20 - 3 - 1)]} = \frac{F_Y(16) - F_Y(10)}{F_Y(16)} \\ &= 1 - \frac{F_Y(10)}{F_Y(16)} \stackrel{\text{tabelas}}{\simeq} 1 - \frac{0.8725}{1.0000} = 0.1275. \end{aligned}$$

Pergunta 3

2 valores

A precipitação máxima mensal (em mm) em determinada cidade pode ser considerada uma variável aleatória X com função de distribuição

$$F_X(x) = e^{-e^{-(x-\alpha)/\lambda}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e valor esperado $E(X) = \alpha + \lambda \times \gamma$. Considere, doravante, $\alpha = 5$, $\lambda = 2$ e $\gamma \simeq 0.577216$.

Obtenha o quantil de ordem 0.80 de X , $x_{0.80}$, bem como a probabilidade de a precipitação máxima mensal ser superior ao seu valor esperado e não exceder o quantil calculado, $P[E(X) < X \leq x_{0.80}]$.

• **V.a. de interesse**

X = precipitação máxima mensal em determinada cidade

• **Quantil pedido**

$$\begin{aligned} x_{0.80} : F_X(x_{0.80}) &= 0.80 \\ e^{-e^{-(x_{0.80}-\alpha)/\lambda}} &= 0.80 \\ e^{-(x_{0.80}-\alpha)/\lambda} &= -\ln(0.80) \\ x_{0.80} &= \alpha - \lambda \ln(-\ln(0.80)) = 5 - 2 \ln(-\ln(0.80)) = 7.999880. \end{aligned}$$

• **Prob. pedida**

Uma vez que $E(X) = \alpha + \lambda \times \gamma \simeq 5 + 2 \times 0.577216 = 6.154432$, segue-se

$$\begin{aligned} P[E(X) < X \leq x_{0.80}] &= F_X(x_{0.80}) - F_X[E(X)] \simeq 0.80 - F_X(6.154432) = 0.80 - e^{-e^{-(6.154432-5)/2}} \\ &\simeq 0.229624. \end{aligned}$$

Pergunta 4

2 valores

O número de espasmos musculares antes e após uma sessão de ondas de choque é representado pelo par aleatório (X, Y) com função de probabilidade conjunta dada pela tabela à direita.

Calcule $V(X - \frac{4}{3}Y)$.

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.1	0
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0	0.2

- **Par aleatório**

(X, Y)

X = número de espasmos musculares antes de uma sessão de ondas de choque

Y = número de espasmos musculares após uma sessão de ondas de choque

- **V.a. de interesse**

$$X - \frac{4}{3}Y$$

- **Variância pedida**

Uma vez que

$$\begin{aligned} V\left(X - \frac{4}{3}Y\right) &= V(X) + V\left(\frac{4}{3}Y\right) - 2\operatorname{cov}\left(X, \frac{4}{3}Y\right) = V(X) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 V(Y) - 2 \times \left(\frac{4}{3}\right) \operatorname{cov}(X, Y) \\ &= V(X) + \frac{16}{9} V(Y) - \frac{8}{3} \operatorname{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

são necessários alguns cálculos auxiliares envolvendo a f.p. conjunta de (X, Y) e as f.p. marginais de X e Y dadas por $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$ e $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$.

X	Y			$P(X = x)$
	0	1	2	
0	0.1	0.1	0	0.2
1	0.1	0.2	0.1	0.4
2	0.2	0	0.2	0.4
$P(Y = y)$	0.4	0.3	0.3	1

- **Valores esperados e variâncias de X e de Y**

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 x \times P(X = x) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4 = 1.2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^2 x^2 P(X = x) = 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.4 = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2 - 1.2^2 = 0.56$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^2 y \times P(Y = y) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = 0.9$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^2 y^2 P(Y = y) = 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 1.5$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1.5 - 0.9^2 = 0.69$$

- **Valor esperado de XY e covariância entre X e Y**

$$E(XY) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xy \times P(X = x, Y = y) = 1 \times 1 \times 0.2 + 1 \times 2 \times 0.1 + 2 \times 2 \times 0.2 = 1.2$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = 1.2 - 1.2 \times 0.9 = 0.12$$

- **Variância pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} V\left(X - \frac{4}{3}Y\right) &= V(X) + \frac{16}{9} V(Y) - \frac{8}{3} \operatorname{cov}(X, Y) \\ &= 0.56 + \frac{16}{9} \times 0.69 - \frac{8}{3} \times 0.12 \\ &= \frac{22}{15} \simeq 1.466667. \end{aligned}$$

Seja X_i o montante pago (em centenas de euros) no dia útil i ($i = 1, \dots, 100$) à empresa responsável pela recolha de entulho de um grande estaleiro de construção civil. Suponha que as variáveis aleatórias X_i são independentes e identicamente distribuídas com valor esperado e desvio padrão iguais a $\mu = 8$ e $\sigma = 2$.

Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de o montante total pago nesses 100 dias se encontrar no intervalo $[780, 820]$.
A: 0.3829 **B:** 0.1587 **C:** 0.6826 **D:** 0.8413

• **V.a.; valor esperado e variância comuns**

X_i = montante pago (em centenas de euros) no dia útil i , $i = 1, \dots, n$

$n = 100$

$E(X_i) = E(X) = \mu = 8$

$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 2^2 = 4$

• **V.a. de interesse**

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ = montante total pago n dias

• **Valor esperado e variância de S_n**

$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n E(X) = n\mu$

$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i \text{ indep.}}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n V(X) = n\sigma^2$

• **Distribuição aproximada de S_n**

De acordo com o teorema do limite central (TLC),

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{nV(X)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \underset{a}{\sim} \text{normal}(0, 1).$$

• **Prob. pedida** (valor aproximado)

$$\begin{aligned} P[780 \leq S_n \leq 820] &= P\left(\frac{780 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{820 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &\stackrel{TLC}{\approx} \Phi\left(\frac{820 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{780 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{820 - 100 \times 8}{\sqrt{100 \times 4}}\right) - \Phi\left(\frac{780 - 100 \times 8}{\sqrt{100 \times 4}}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 2 \times \Phi(1) - 1 \\ &\stackrel{\text{tabelas/calcul.}}{\approx} 2 \times 0.8413 - 1 \\ &= 0.6826. \end{aligned}$$

Admita que a proporção de impurezas contidas na água é representada pela variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde α é um parâmetro desconhecido positivo.

Deduzo o estimador de máxima verosimilhança de $V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$ com base em $(X_1, \dots, X_n)$, uma amostra aleatória de X .

- **V.a. de interesse; f.d.p.**

X = proporção de impurezas contidas na água em partes por milhão

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Parâmetro desconhecido**

$$\alpha \quad (\alpha > 0)$$

- **Amostra; amostra aleatória**

$(x_1, \dots, x_n)$, amostra de dimensão n proveniente de X .

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$, amostra aleatória de dimensão n proveniente de X .

- **Dedução do estimador de MV de α**

Passo 1 — Função de verosimilhança

$$L(\alpha | \underline{x}) = f_{\underline{X}}(\underline{x}) \stackrel{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n (\alpha x_i^{\alpha-1}) = \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0$$

Passo 2 — Função de log-verosimilhança

$$\ln L(\alpha | \underline{x}) = n \ln(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \quad \alpha > 0$$

Passo 3 — Maximização

A estimativa de MV de α será representada por $\hat{\alpha}$ e

$$\hat{\alpha} : \begin{cases} \left. \frac{d \ln L(\alpha | \underline{x})}{d\alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \left. \frac{d^2 \ln L(\alpha | \underline{x})}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\hat{\alpha}} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \\ -\frac{n}{\hat{\alpha}^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} \\ -\frac{n}{\hat{\alpha}^2} < 0 \quad \text{(prop. verdadeira)} \end{cases}$$

Passo 4 — Estimador de MV de α

$$EMV(\alpha) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}$$

- **Outro parâmetro desconhecido**

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)} = h(\alpha)$$

- **Estimador de MV de $h(\alpha)$**

Tirando partido da propriedade de invariância dos EMV, conclui-se que

$$\begin{aligned} EMV[h(\alpha)] &= h[EMV(\alpha)] \\ &= \frac{EMV(\alpha)}{[EMV(\alpha) + 1]^2 [EMV(\alpha) + 2]}, \end{aligned}$$

onde, recorde-se, $EMV(\alpha) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}$.

selecionou uma amostra casual de 250 dessas peças, tendo constatado que 41 delas eram não conformes. Determine um intervalo de confiança aproximado a 98% para a probabilidade (p) de uma peça forjada de aço selecionada casualmente ser não conforme.

A: [0.1629, 0.1651] B: [0.1159, 0.2121] C: [0.1627, 0.1653] D: [0.1095, 0.2185]

- **V.a. de interesse**

$$X = \begin{cases} 1, & \text{peça forjada de aço selecionada casualmente ser não conforme} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Situação**

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

p DESCONHECIDO

- **Obtenção de IC aproximado para p**

Passo 1 - Seleção da v.a. fulcral para p

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \stackrel{a}{\sim} \text{normal}(0, 1)$$

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade

Como $(1 - \alpha) \times 100\% = 95\% \Leftrightarrow \alpha = 0.02$, lidaremos com os quantis seguintes:

$$\begin{cases} a_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = -\Phi^{-1}(0.99) \stackrel{\text{tabela/calc.}}{=} -2.3263 \\ b_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0.99) = 2.3263. \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) \simeq 1 - \alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \leq b_\alpha\right] \simeq 1 - \alpha$$

$$P\left[\bar{X} - b_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} - a_\alpha \times \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right] \simeq 1 - \alpha$$

Passo 4 — Concretização

A expressão geral do intervalo aproximado de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para p é

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(p) \simeq \left[\bar{x} \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \times \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right].$$

Ao termos em conta que $n = 250$, $\alpha = 0.02$, $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 2.3263$ e $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{41}{250} = 0.164$,

$$\begin{aligned} IC_{98\%}(p) &\simeq \left[0.164 - 2.3263 \times \sqrt{\frac{0.164 \times (1 - 0.164)}{250}}, 0.164 + 2.3263 \times \sqrt{\frac{0.164 \times (1 - 0.164)}{250}} \right] \\ &\simeq [0.1095, 0.2185]. \end{aligned}$$

Pergunta 8

2 valores

A borracha pode ser adicionada ao asfalto para reduzir o ruído quando o material é utilizado como pavimento. Assuma doravante que a viscosidade dinâmica (X , em centipoise) do asfalto é normalmente distribuída com valor esperado μ e variância σ^2 desconhecidos. Recolhidas casualmente 15 observações de X , um engenheiro civil obteve $\bar{x} = 3210.7$ e $s^2 = 13832.50$.

Teste a hipótese $H_0 : \sigma^2 = 170^2$ contra $H_1 : \sigma^2 < 170^2$. Obtenha o valor-p deste teste. Para que níveis de significância se deve rejeitar H_0 ?

- **V.a. de interesse**

X = viscosidade dinâmica do asfalto

- **Situação**

$X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$

μ desconhecido

σ^2 DESCONHECIDO

- **Hipóteses**

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 170^2$ vs. $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

- **Estatística de teste**

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim_{H_0} \chi_{(n-1)}^2$$

- **Região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste)**

O teste é unilateral inferior ($H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$), logo a região de rejeição de H_0 é do tipo $W = (0, c)$.

- **Valor-p e comentário**

Atendendo a que $s^2 = 13832.50$, o valor observado da estatística de teste e o valor-p são iguais a

$$t = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1) \times 13832.50}{170^2} \simeq 6.701$$

$$\text{valor-p} = P(T < t | H_0) = F_{\chi_{(n-1)}^2}(t) = F_{\chi_{(14)}^2}(6.701) \stackrel{calc.}{=} 0.0544,$$

é suposto:

- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > \text{valor-p} = 5.44\%$, designadamente ao n.s. de 10%;
- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq \text{valor-p} = 5.44\%$, nomeadamente aos n.u.s. de 1% e 5%.

[Alternativamente, poderíamos recorrer às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado e adiantar um intervalo para o valor-p:

$$\begin{aligned} F_{\chi_{(14)}^2}^{-1}(0.05) = 6.571 &< t = 6.701 < 7.242 = F_{\chi_{(14)}^2}^{-1}(0.075) \\ 0.05 &< \text{valor-p} = F_{\chi_{(14)}^2}(6.701) < 0.075 \end{aligned}$$

Assim, é suposto:

- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq \text{valor-p} = 7.5\%$, nomeadamente ao n.s. de 10%;
- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq \text{valor-p} = 5\%$, designadamente aos níveis de significâncias de 1% e 5%].

Pergunta 9

2 valores

Uma engenheira pretende averiguar se o tempo de vida de uma determinada peça metálica utilizada no fabrico de cadeiras de rodas segue uma distribuição exponencial com parâmetro 0.5 (hipótese nula, H_0).

Com base no teste de ajustamento do qui-quadrado e na tabela de frequências abaixo, teste H_0 ao nível de significância de 5%.

Classes	]0, 1]	]1, 2]	]2, 3]	]3, 4]	]4, +∞[
Frequência absoluta observada	42	20	12	5	21
Frequência absoluta esperada sob H_0	39.35	23.87	14.47	8.78	13.53

- **Hipóteses**

$$H_0 : X \sim \text{exponencial}(0.5)$$

$$H_1 : X \not\sim \text{exponencial}(0.5)$$

- **Nível de significância**

$$\alpha_0 = 5\%$$

- **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{(k-1)},$$

onde: k = no. de classes = 5; O_i = frequência absoluta observável da classe i ; E_i = frequência absoluta esperada, sob H_0 , da classe i .

- **Região de rejeição de H_0** (para valores observados de T)

Lidamos com um teste de ajustamento, donde a região de rejeição de H_0 é o intervalo à direita $W = (c, +\infty)$, onde

$$c = F_{\chi^2_{(k-1)}}^{-1}(1 - \alpha_0) = F_{\chi^2_{(5-1)}}^{-1}(1 - 0.05) \stackrel{\text{tabela/calc.}}{=} 9.488.$$

- **Decisão**

	Classe i	Freq. abs. obs.	Freq. abs. esp. sob H_0	Parcelas valor obs. estat. teste
i		o_i	E_i	$\frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$
1	]0, 1]	42	39.35	$\frac{(42-39.35)^2}{39.35} \simeq 0.178$
2	]1, 2]	20	23.87	0.627
3	]2, 3]	12	14.47	0.422
4	]3, 4]	5	8.78	1.627
5	]4, +\infty[	21	13.53	4.124
		$\sum_{i=1}^k o_i = n = 100$	$\sum_{i=1}^k E_i = n = 100$	$t = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} \simeq 6.978$

Uma vez que $t = 6.689 \notin (9.488, +\infty)$ não devemos rejeitar H_0 ao n.s. $\alpha_0 = 5\%$.

Pergunta 10

2 valores

Após se ter admitido a validade do modelo de regressão linear simples, $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$, foram obtidas as seguintes quantidades para um conjunto de 14 observações da força compressiva (x) e da permeabilidade intrínseca (Y) de várias misturas de betão:

$$\sum_{i=1}^{14} x_i^2 - n\bar{x}^2 \simeq 25.348571, \quad \hat{\beta}_0 \simeq 48.012963, \quad \hat{\beta}_1 \simeq -2.329802, \quad \hat{\sigma}^2 \simeq 1.84357.$$

Tendo presente estes valores e as hipóteses de trabalho convenientes, teste $H_0 : \beta_1 = 0$ contra $H_1 : \beta_1 < 0$. Deve

A: Rejeitar H_0 a 1%, 5% e 10%.

B: Rejeitar H_0 a 5% e 10% e não rejeitar H_0 a 1%.

C: Rejeitar H_0 a 10% e não rejeitar H_0 a 1% e 5%.

D: Não rejeitar H_0 a 1%, 5% e 10%.

- **[Modelo de RLS e hipóteses de trabalho**

Y = permeabilidade intrínseca da mistura de betão (v.a. resposta)

x = força compressiva (variável explicativa)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\varepsilon_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{normal}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n]$$

- **Hipóteses**

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$$

$$H_1 : \beta_1 < \beta_{1,0}$$

- **Nível de significância**

$$\alpha_0 = 1\%$$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \sim_{H_0} t_{(n-2)}$$

- **Região de rejeição de H_0** (para valores de T)

Estamos a lidar com um teste unilateral inferior ($H_1 : \beta_1 < \beta_{1,0}$), logo a região de rejeição de H_0 é do tipo $W = (-\infty, c)$.

- **Decisão** (com base no valor-p)

Atendendo ao enunciado, $\sum_{i=1}^{14} x_i = 43.0$, $\sum_{i=1}^{14} x_i^2 = 157.42$, $\hat{\beta}_1 \simeq -2.329802$ e $\hat{\sigma}^2 \simeq 1.843571$. Logo, o valor observado da estatística de teste e o valor-p são iguais a

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \simeq \frac{-2.329802 - 0}{\sqrt{\frac{1.843571}{25.348571}}} \simeq -8.639045.$$

$$valor - p = P(T < t \mid H_0) = F_{t_{(n-2)}}(t) = F_{t_{(12)}}(-8.639045) = 1 - F_{t_{(12)}}(8.639045) \stackrel{calc.}{\simeq} 0.000001.$$

Logo, devemos

- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > valor - p = 0.0001\%$, designadamente aos n.u.s. de 1%, 5% e 10%.

[Alternativamente, poderíamos recorrer às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado e adiantar um intervalo para o valor-p:

$$F_{t_{(12)}}^{-1}(0.9995) = 4.318 < -t = 8.639045 < +\infty = F_{t_{(12)}}^{-1}(1)$$

$$0.9995 < F_{t_{(12)}}(8.639045) < 1$$

$$0 < valor - p = 1 - F_{t_{(12)}}(8.639045) < 0.0005.$$

Assim sendo, é suposto

- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq valor - p = 0.05\%$, nomeadamente ao n.u.s. de 1%, 5% e 10% [opção A].