1

Natureza da Investigação Operacional

As origens da Investigação Operacional

Desde o advento da revolução industrial, o mundo tem assistido a um notável crescimento das empresas e outras organizações, tanto em dimensão como em complexidade [Hillier & Lieberman]. Das pequenas oficinas dos artesãos, foi-se caminhando até às empresas que movimentam milhões de contos (década de *1990*), com resultados espectaculares. Contudo, simultaneamente, esta especialização crescente criou novos problemas, ainda persistentes na maioria das empresas.

Um destes problemas é a tendência das muitas componentes ou departamentos para se converterem em domínios autónomos, com os seus próprios objectivos e valores, perdendo assim de vista a coordenação com as actividades e objectivos globais.

Outro problema é que, à medida que a complexidade e a especialização aumentam, mais difícil se torna distribuir os recursos disponíveis pelas várias actividades, dum modo globalmente eficaz.

As raízes da Investigação Operacional podem-se encontrar desde há muitas décadas. No entanto, o início da chamada «investigação operacional»[1] é geralmente atribuído à actividade militar da 2.ª Grande Guerra. Devido ao esforço de guerra, havia urgente necessidade de distribuir, de forma eficiente, recursos escassos às várias operações militares e às actividades dentro de cada operação. Em consequência, as administrações militares britânica e americana chamaram um grande número de cientistas para aplicarem um método científico ao tratamento destes problemas estratégicos e tácticos. Foi-lhes, pois, pedido que fizessem «investigação» em «operações» (militares).

Estas equipas foram as primeiras existentes em Investigação Operacional. Atribui-se-lhes o mérito das vitórias na Batalha Aérea de Inglaterra, na Campanha das Ilhas do Pacífico e na Batalha do Atlântico Norte, entre outras.

Impressionada pelo êxito presumível da Investigação Operacional no campo militar, a indústria começou-se gradualmente a interessar. Com o crescimento industrial do pós-guerra, tornou-se claro que os novos problemas da indústria, do comércio e da administração pública eram basicamente os já conhecidos, embora em

[1] Designações estrangeiras: pesquisa operacional (Brasil), investigación operativa (Espanha), recherche opérationnelle (França), ricerca operativa (Itália), Unternehmensforschung ou O. R. (Alemanha), operational research (Inglaterra), operations research (EUA).

diferente contexto. Em *1951*, os efeitos da adopção da Investigação Operacional eram evidentes em Inglaterra e prestes a notarem-se nos EUA. Daí em diante, nos países industrializados, o desenvolvimento tem sido muito rápido.

Podem-se identificar pelo menos dois factores que determinaram o rápido curso dos acontecimentos. Um foi o progresso substancial das técnicas de Investigação Operacional durante a guerra, que motivou a continuação da pesquisa. Um exemplo notável foi o método do simplex para os problemas de programação linear, da autoria de George Dantzig, em *1947*. Muitas das componentes básicas da Investigação Operacional —programação linear, programação dinâmica, teoria das filas de espera, gestão de stocks— estavam estabelecidas antes do fim da década de *1950*.

O outro factor que deu grande ímpeto ao crescimento da Investigação Operacional foi a coincidência com o advento da revolução informática.

A natureza da Investigação Operacional

Que é a Investigação Operacional ? Uma maneira de tentar responder a esta pergunta é dar uma definição. Por exemplo, a Investigação Operacional pode ser descrita como «um tratamento científico da tomada de decisões, no que respeita às operações dos sistemas organizacionais», ou, simplificadamente [Wagner], «um tratamento científico da resolução de problemas de gestão». Para Ecker & Kupferschmid, é «o uso de modelos quantitativos para analisar e prever o comportamento de sistemas que são influenciados por decisões humanas». Contudo, estas descrições, como outras tentativas, são tão gerais que se podem aplicar com idêntica propriedade a vários outros domínios. A melhor maneira de compreender a verdadeira natureza da Investigação Operacional é talvez examinar as suas características mais marcadas.

- Aplica-se a problemas de condução e coordenação de operações ou actividades numa organização.

A natureza da organização é essencialmente imaterial: comércio, indústria, administração civil ou militar, hospitais, etc.. O âmbito de aplicação é, pois, extraordinariamente largo. O método da Investigação Operacional é o método científico: observação, formulação do problema e construção dum modelo científico (matemático) que procura extrair a essência do problema real.

- Tenta encontrar, não só uma solução, mas a melhor solução (solução «óptima»).

Em vez de se contentar com uma simples melhoria duma situação, o objectivo é identificar a melhor decisão. A pesquisa do óptimo é uma característica fundamental da Investigação Operacional.

Os aspectos já enumerados da Investigação Operacional levam, naturalmente, a um outro:

- Tende, dada a sua variedade, a levar ao funcionamento em equipa.

Tipicamente, a equipa deverá incluir especialistas em matemática, probabilidades e estatística, economia, computação, engenharia, ciências comportamentais e técnicas específicas da Investigação Operacional.

Em suma, a Investigação Operacional ocupa-se da tomada óptima de decisões e da modelação de sistemas determinísticos e probabilísticos da vida real. As situações caracterizam-se, frequentemente, pela necessidade de atribuição de recursos limitados. A contribuição da Investigação Operacional provém essencialmente de:

- Estruturar a situação real num modelo matemático, extraindo os elementos essenciais, de modo a poder procurar-se uma solução relevante para as finalidades do decisor.
- Explorar a estrutura das soluções e desenvolver processos sistemáticos para as obter.
- Desenvolver uma solução, incluindo a teoria matemática (se necessário), que produza um valor óptimo da medida de qualidade do sistema.

Wagner, por seu turno, aponta concisamente como características próprias da Investigação Operacional as seguintes:

- Prioridade à tomada de decisões —os resultados da análise devem ser aplicáveis, sem ambiguidade.
- Fundamento em critérios de efectividade económica —a comparação das várias acções possíveis deve ser baseada em valores mensuráveis.
- Referência a um modelo matemático formal —os procedimentos de manipulação dos dados devem ser claros.
- Dependência dum computador —atributo não «desejável», mas uma necessidade proveniente quer da complexidade do modelo, quer do volume de dados.

Apesar da convicção com que autores da maior importância na Investigação Operacional —como os citados Hillier, Lieberman, Wagner— afirmam a ligação desta disciplina científica à gestão e à economia, não deve ficar essa ideia redutora. Ecker e Kupferschmid [1988], *v. g.*, descrevem certas aplicações não-económicas, embora sob a sintomática designação de «científicas».

Na cadeira de Investigação Operacional (curso de Engenharia Química) pretende-se, precisamente, não só introduzir alguns rudimentos de Gestão, mas principalmente realçar o aspecto «optimização».

O impacto da Investigação Operacional

A influência da Investigação Operacional é hoje muito alargada, referindo-se indústrias como: aeronáutica, automóvel, de comunicações, informática, de energia eléctrica, electrónica, alimentar, metalúrgica, de exploração mineira, do papel, petrolífera e de transportes. De citar também as instituições financeiras, os hospitais e os departamentos governamentais.

Consideremos, agora, problemas que têm sido resolvidos mediante Investigação Operacional. A programação linear tem sido fundamental para resolver problemas de colocação de pessoal, loteamento de materiais, distribuição e transporte e carteiras de investimento. A programação dinâmica aplica-se a planeamento de campanhas de publicidade, distribuição de esforço de vendas e planeamento de produção. A teoria das filas de espera tem sido aplicada a problemas de congestão de tráfego, avaria de máquinas sujeitas a falha, organização de tráfego aéreo, gestão hospitalar, projecto de albufeiras.

Tentando quantificar a verdadeira implantação da Investigação Operacional, têm sido feitos vários inquéritos. Por exemplo, em *1977*, W. Ledbetter e J. Cox («Are OR Techniques Being Used ?», *Industrial Engineering*, pp 19–21, Feb.) reportam um inquérito dirigido às 500 maiores empresas, segundo listagem de *1975* da revista *Fortune*. Das 176 que responderam, concluíram que a maior utilização ia para a programação linear e para a simulação.

Quanto a associações científicas dedicadas à Investigação Operacional, citam-se, nos EUA, a Operations Research Society of America (ORSA), fundada em *1952*, e The Institute of Management Sciences (TIMS), em *1953*. ORSA publica a revista Operations Research e TIMS a Management Science. Revistas similares são publicadas em Inglaterra, França, Índia, Japão, Canadá, Alemanha. De facto, há algumas dezenas de países membros na IFORS, International Federation of Operational Research Societies. Em Portugal, refira-se a APDIO, «Associação Portuguesa de Investigação Operacional».

Aplicações típicas

Os temas adiante referidos aparecem tradicionalmente na maioria dos livros de Investigação Operacional (mencionando-se a correspondente terminologia inglesa, bem como abreviaturas consagradas):

- Programação linear (linear programming, LP)
- Modelos de PL relacionados: problema do transporte (transportation problem, TP), afectação (assignment)
- Programação linear inteira (integer LP, MILP)
- Programação dinâmica (dynamic programming)
- Filas de espera (queueing theory)
- Gestão de stocks (inventory models)
- Simulação (simulation)
- Sequenciação (sequencing)
- Substituição de equipamento (equipment replacement)
- Teoria dos jogos (game theory)

Podem-se classificar (grosseiramente) em modelos «determinísticos» e «probabilísticos». São modelos «determinísticos» a LP e relacionados, a ILP, a programação dinâmica, a sequenciação; «probabilísticos», as filas de espera, a gestão de stocks, a simulação.

Bibliografia

Geral:

- BRONSON Richard, 1982, «Schaum's outline of theory and problems of Operations Research», Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill, New York.
- CHURCHMAN, W., R. L. ACKOFF, E. L. ARNOFF, 1957, «Operations Research», Wiley, New York.
- ECKER, J. G., M. KUPFERSCHMID, 1988, «Introduction to Operations Research», Wiley, New York.

- FAURE, R. , 1978, «Précis de Recherche Opérationnelle» (3. ed.), Bordas (Dunod Décision), Paris.
- DESBAZEILLE, G., 1976, «Exercices et Problèmes de Recherche Opérationnelle» (2. ed.), Dunod, Paris.
- HILLIER, F. S., G. J. LIEBERMAN, 2005, «Introduction to Operations Research» (8. ed.), McGraw-Hill.
- KAUFMANN, Arnold, 1970, «Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle», Dunod, Paris.
- WAGNER, H. M., 1972, «Principles of Operations Research (with applications to managerial decisions)» (2. ed.), Prentice-Hall, London (1969).

Específica:

- BELLMAN, R., S. DREYFUS, 1962, «Applied Dynamic Programming», Princeton University Press, Princeton.
- DANTZIG, G. B., 1963, «Linear Programming and Extensions», Princeton University Press, Princeton.
- GASS, S. I., 1969, «Linear Programming: Methods and Applications» (4. ed.), McGraw-Hill, New York.
- HADLEY, G., 1962, «Linear Programming», Addison-Wesley, Reading, MA (há tradução).
- Little, J. D. C., 1961, «A Proof for the Queueing Formula $L = l\ W$», Operations Research, 9:383–387.

Revistas

- *J. O. R. S. A.* ou *Operations Research*, Journal of the Operations Research Society of America (USA)
- *Management Science* (USA)
- *Investigação Operacional*, revista da APDIO, Associação Portuguesa de Investigação Operacional (Portugal)[2]
- *N. R. L. Q.*, Naval Research Logistics Quarterly, Office of Naval Research (USA)
- *Rand Report*, publicado pela Rand Corporation, Santa Monica (USA)
- *O. R. Q.*, Operational Research Quarterly (GB)
- *J. S. I. A. M.*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM J. on Applied Mathematics) (USA)
- *R. R. O.*, Revue de Recherche Opérationnelle (França)
- *B. C. R. O.*, Bolletino del Centro per la Ricerca Operativa (Itália)
- *Unternehmensforschung* (Investigação Operacional) (Áustria)
- *CACM* (Communications of the), JACM (Journal of the) e outras revistas da Association for Computing Machinery (USA)

(Contactos: ver, por exemplo, sítio Internet da APDIO)

[2] *http://www.apdio.pt* (válido em Fev.-2007). Procurar na Internet sob "APDIO" nos motores de busca.

Revistas relacionadas:

Econometrica
IBM Systems Journal
AT&T Technical Journal
Etc.

■

2

O Problema do Transporte

Podem ser formulados como «problemas de transporte» vários problemas aparentemente não relacionados, entre outros: planeamento sequencial de produção, afectação de pessoal, gestão de tesouraria [Guerreiro *et al.*, 1985]. Contudo, é o *problema do transporte* clássico que justifica a designação do conjunto.

Sendo o problema do transporte um caso particular da Programação Linear, ele vem, naturalmente, depois desta nos livros de Investigação Operacional. Como o que se pretende aqui, no entanto, é provocar o interesse do leitor, passa-se a abordar já este problema, que achamos sugestivo e surpreendentemente fácil. Em contra-partida, a resolução não pode ser «explicada», mas apenas descrita.

Problema do Transporte

Da necessidade de programar a distribuição óptima dum produto surge o *problema do transporte*. Designar-se-á, abreviadamente, por TP, segundo a nomenclatura «internacional» (anglo-americana), relativa a «transportation problem». Trata-se de procurar a distribuição mais económica dum certo produto homogéneo, o qual:

1) Está disponível em «origens», sejam m, em quantidades fixas conhecidas, $a_i \geq 0$, $i = 1..m$ [3], as *produções* ou *ofertas*;
2) É necessário em «destinos», sejam n, em quantidades fixas conhecidas, $b_j \geq 0$, $j = 1..n$, os *consumos* ou *procuras*;
3) Deve ser enviado directamente das origens para os destinos, esgotando a disponibilidade em cada origem e satisfazendo a necessidade em cada destino, pelo que (tipicamente) a produção total deve igualar o consumo total.

O objectivo é a *minimização* do custo total de transporte, seja z [4], envolvido no programa de distribuição do produto, em que se supõe que os custos unitários de transporte, c_{ij}, de cada origem i para cada destino j, são constantes, isto é, independentes das quantidades transportadas, x_{ij}. (O problema é, pois, linear, excluindo efeitos como descontos ou custos fixos, que se podem resolver fora dos limites do TP.) Os locais de origem e os de destino podem ser quaisquer,

[3] Utiliza-se esta notação ($i = 1..m$) com o significado de a variável assumir todos os valores inteiros do intervalo de extremos unidos por «..», inclusive.

[4] Em Investigação Operacional, a função a optimizar costuma designar-se por *função objectivo* (em que «objectivo» é um adjectivo substantivado) e notar-se pelo símbolo z.

incluindo-se quaisquer possibilidades de coincidência entre locais (com distância nula, o que se traduziria possivelmente por custo de transporte nulo).

O problema do transporte pode ser ilustrado sob a forma duma *rede*, como a da *Figura 1*, com m origens e n destinos, umas e outros representados por *nós*. Os *arcos* que ligam as origens aos destinos representam os percursos através dos quais o produto pode ser transportado.

A formalização do problema do transporte beneficia duma apresentação tabular típica *(Quadro 1)*, a qual contém todos os dados do problema. Cada linha do quadro corresponde a uma origem e cada coluna a um destino (atribuição habitual). Uma coluna suplementar, exterior ao quadro, contém a informação relativa às *ofertas* (quantidades disponíveis nas origens) e uma linha suplementar contém a informação respeitante às *procuras* (quantidades necessárias nos destinos). Em cada «casa» $\{i, j\}$ encontra-se o custo unitário de transporte, c_{ij}, formando a «matriz do custo» (ou «dos custos»), C.

É também introduzida a «matriz do transporte», X, de elementos x_{ij} *(Quadro 2)*, sendo cada um deles a quantidade a transportar desde a origem i para o destino j. (Na literatura, vê-se sistematicamente c_{ij} e x_{ij} ocuparem a mesma casa de um só quadro, mas essa economia de espaço afigura-se-nos resultar em dificuldade de leitura.)

Para qualquer plano de transporte «admissível», a soma dos x_{ij} em linha há-de, evidentemente, igualar a quantidade a_i, i. é, $\Sigma_j\, x_{ij} = a_i$, e a soma dos x_{ij} em coluna igualará a quantidade b_j, $\Sigma_i\, x_{ij} = b_j$. O custo de transporte associado a cada troço do percurso (sendo x_{ij} «peças» transportadas ao custo unitário de c_{ij}), dado por $c_{ij}\, x_{ij}$; portanto, o custo total do plano de transporte é $\Sigma_i \Sigma_j\, c_{ij}\, x_{ij}$.

Quadro 1 **–** Matriz do custo, ofertas e procuras

Origem:	Destino:	1	2	…	j	…	n	*Oferta:*
	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
	…	…	…	…	…	…	…	…
	i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}		c_{in}	a_i
	…	…	…	…	…	…	…	…
	m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
	Procura:	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$(\Sigma a_i = \Sigma b_j)$

Quadro 2 **–** Matriz do transporte

Origem:	Destino:	1	2	…	j	…	n
	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}
	…	…	…	…	…	…	…
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}		x_{in}
	…	…	…	…	…	…	…
	m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}

O «modelo matemático» do *problema do transporte* é, pois,

$$[\min] \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1..m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1..n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1..m,\ j = 1..n$$

O último conjunto de constrangimentos, fisicamente necessário, relativo a não-negatividade, relembra o facto de que o problema do transporte é um caso particular da Programação Linear, na qual esta condição é imprescindível. (A notação «[min]» significa, não que o mínimo de z iguala o 2.º membro, mas sim que se pretendem minimizar os dois membros.)

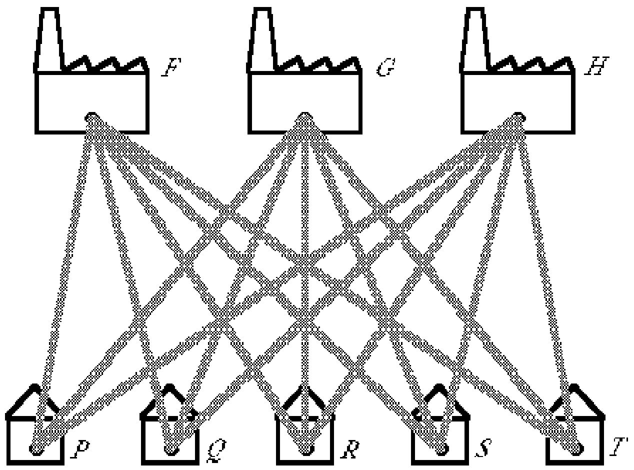

Figura 1 – Representação dum «problema do transporte»

Qualquer outro problema que apresente esta mesma estrutura —isto é, seja representável por estas relações matemáticas— pertence também à classe dos problemas de Programação Linear designada por *Problema do Transporte*.

■ ***Exemplo 1 (protótipo)***

Uma firma (*Figura 1*) dispõe de 3 centros de produção —fábricas *F*, *G* e *H*— situados em diferentes localidades, com capacidades de produção, respectivamente, de 100, 120 e 120 unidades (t / dia) de determinado produto, com que abastece 5 centros de distribuição seus —armazéns *P*, *Q*, *R*, *S* e *T*— também situados em diferentes locais, que movimentam, respectivamente, 40, 50, 70, 90 e 90 unidades (t / dia).

Quadro 3 – Custos unitários (conto / t) de transporte fábrica-armazém, produções e consumos (t)

	P	*Q*	*R*	*S*	*T*	
F	4	1	2	6	9	100
G	6	4	3	5	7	120
H	5	2	6	4	8	120
	40	50	70	90	90	

Os custos unitários (conto / t) de transporte entre fábricas e armazéns (consequência das suas localizações geográficas e preços disponíveis) são dados no *Quadro 3* (problema de Kaufmann [1970]).

Pretende-se estabelecer o «plano» (ou «programa») mais económico de distribuição do produto, desde as fábricas até aos armazéns. ■

Propõem-se os seguintes passos:

a) Tome uma decisão prévia (ache uma solução) quanto à repartição das unidades fabricadas pelos vários armazéns.

b) Procure, por tentativas metódicas, uma nova solução, próxima da óptima. Verifique se a solução achada é óptima.

c) Proceda iterativamente à melhoria da solução, até atingir o óptimo.

Nota 1: Como achar uma «solução inicial»

Eis seis maneiras para tal.

Matriz ***do custo***, ***C*** (custo unitário de transporte, por exemplo, $ / peça)
(custo de transporte desde cada uma das 3 origens para cada um dos 5 destinos)

4	1	2	6	9	100
6	4	3	5	7	120
5	2	6	4	8	120
40	50	70	90	90	

(Está «orlada» com as quantidades disponíveis nas origens — *produções*, *ofertas* — e requeridas nos destinos — *consumos*, *procuras*.)

1) Uma solução inadmissível — *matriz do transporte*, *X*

20	25	35	40	–20	100	
–25	30	40	45	30	120	
45	–5	–5	5	80	120	
40	50	70	90	90		$z = 1605$

2) Uma solução *admissível* («não-básica»)

10	20	30	20	20	100	
5	20	0	50	45	120	
25	10	40	20	25	120	
40	50	70	90	90		$z = 1760$

3) Uma solução admissível *básica* — uma solução básica resulta de preenchimentos máximos. (Os expoentes mostram a ordem de preenchimento.)

0	*0*	70^{1}	30^{3}	*0*	100
40	*0*	*0*	*60*	*20*	120
0	50^{2}	*0*	*0*	70^{4}	120
40	50	70	90	90	

$z = 1660$

Não demonstraremos, mas **só interessa manusear *soluções admissíveis e básicas*.**

4) Uma solução (¿ cara ?)

0	0	0	60	40	100
40	50	0	30	0	120
0	0	70	0	50	120
40	50	70	90	90	

$z = 2130$

Esta solução é, com efeito, a mais cara, resultante de se ter resolvido o problema «ao contrário». Seguem-se soluções (admissíveis básicas) sistemáticas, as únicas que realmente interessam para iniciar a procura do óptimo.

5) Solução (a. b.) pela «regra ou método do canto noroeste» ("NW corner rule"), sendo os sentidos indicados inerentes à regra.

$40\rightarrow$	$50\rightarrow$	$10\downarrow$	0	0	100
0	0	$60\rightarrow$	$60\downarrow$	0	120
0	0	0	$30\rightarrow$	90	120
40	50	70	90	90	

$z = 1550$

6) Solução pelo «método de Vogel» ou «das diferenças» (— modificado).

30	0	70	0	0	100
10	0	0	20	90	120
0	50	0	70	0	120
40	50	70	90	90	

$z = 1430$

■

Para obtenção de *uma* solução num problema do transporte, conforme se pede na alínea ***a)*** do *Exemplo 1* (protótipo), poderá proceder-se por tentativas. Para responder à alínea ***b)***, existem vários métodos, dos quais o mais simples é certamente o *do canto noroeste*. É possível obter uma solução de muitas maneiras (incluindo por tentativas), mas um método como o do canto NW tem a vantagem de fornecer uma solução com as duas propriedades fundamentais (como se verá) de ser «admissível» (ou «aceitável») e «básica» (ou «de base»):

- *Solução admissível* (ou *aceitável*, ou *viável*) é uma solução que respeita todos os constrangimentos do problema.
- *Solução básica* (ou *de base*) é uma solução com $m+n-1$ posições «preenchidas» (positivas ou, no limite, nulas) que não formam «ciclos».

(Note-se que uma solução com este número de posições preenchidas não é *necessariamente* básica. No entanto, o algoritmo em estudo só constrói soluções deste tipo *legítimas* [Hillier & Lieberman, 1990].)

O algoritmo proposto («stepping-stone») para resolver o problema do transporte só arranca de soluções admissíveis básicas, continuando a gerar apenas soluções desse tipo. As soluções óptimas (se únicas) do problema do transporte são, necessariamente, também admissíveis e básicas.

Método do canto NW

[Todas as «casas» (posições) referidas são da matriz do transporte, *X*.]

Passo 1 – Considere a casa não preenchida no *canto superior esquerdo* (NW) corrente e atribua-lhe a maior quantidade possível.

Passo 2 – Se a atribuição feita saturou a oferta da *linha*, avance uma *linha*; se saturou a procura da *coluna*, avance uma *coluna*. (Se saturou *ambas* e não é a última atribuição, a solução é degenerada, um caso a examinar.) Com o problema assim «reduzido» (de uma linha ou coluna), volte ao *Passo 1*.

O aparecimento duma solução *degenerada* provoca dificuldades, que serão abordadas mais adiante.

Se se pretende já, como na alínea ***b)*** do *Exemplo 1* (protótipo), uma solução *próxima* da óptima, pode recorrer-se a uma considerável diversidade de métodos heurísticos, que têm em conta, logicamente, a matriz dos custos. O método por nós adoptado consiste numa variante do método de Vogel —ou das diferenças, ou, ainda (segundo, *v. g.*, Faure [1978]), de Balas-Hammer— e é o seguinte.

Método de Vogel (modificado)

(No início, a matriz *C* «restante» é, evidentemente, a própria matriz do problema original.)

Passo 1 – Calcule, na matriz *C* restante, a diferença entre os dois valores menores em cada fila (linha ou coluna) e seleccione a fila que tiver a diferença máxima.

Passo 2 – Atribua, na matriz *X*, a quantidade maior possível ao elemento mais barato da fila seleccionada.

Passo 3 – ***(a)*** Se a atribuição feita saturou a capacidade da fila, elimine a fila de *C*. (Se foram saturadas linha e coluna e esta não é a última atribuição, a solução é degenerada.) Se não, prossiga no preenchimento desta fila, seleccionando como «mais barato» o novo elemento mais barato disponível. ***(b)*** Volte ao *Passo 1*.

Método do "stepping-stone"

Para, conforme a alínea ***c)*** do *Exemplo 1* (protótipo), se proceder à melhoria da solução (encontrada por um método como os já apresentados), utiliza-se a via clássica para resolução do problema do transporte, o método do "stepping-stone"[5], até

[5] *Stepping-stone* – raised stone usu. as one of series as means of crossing stream etc., *fig.* means of progress ["The Pocket Oxford Dict.", R. Allen (ed.), 17th ed., Clarendon Press, Oxford, GB, 1985]. Em português, *alpondras* (ou *pondras*, ou *poldras*): (f. pl.) pedras colocadas, de margem a margem,

se atingir o óptimo. Este é o método consagrado para efectivamente *optimizar* a solução (ouvindo-se por vezes "stepping-stone" como sinónimo de problema do transporte); os métodos anteriormente citados destinam-se apenas a fornecerem uma solução admissível básica *inicial*.

O método do "stepping-stone" —cuja fundamentação não é fácil antes da da Programação Linear— baseia-se na inspecção duma matriz D (adiante reconhecida como $C - C'$) tal que $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, com u_i e v_j a determinar, obtida a partir da matriz dos custos, C, e tendo de ser $u_i + v_j = c_{ij}$ para as $m + n - 1$ posições «preenchidas» (isto é, com uma quantidade não-nula) da matriz X. A informação obtida da matriz D não só indica se uma solução é ou não óptima, como orienta a construção duma nova solução, «melhor» (não pior) que a anterior. Assim, inspeccionada a matriz D, e conforme os seus elementos sejam ou não todos positivos, ter-se-á:

- Todos os elementos são não-negativos, $d_{ij} \prod 0$: a solução X é óptima. Caso se verifique algum $d_{ij} = 0$, haverá soluções (óptimas) múltiplas.
- Pelo menos um elemento é negativo, $d_{rs} < 0$: a solução X não é óptima. Obter-se-á uma melhor solução aumentando x_{rs} tanto quanto possível, com as necessárias compensações em X para manter a admissibilidade da solução.

A aplicação do "stepping-stone" —veja-se a *Nota 2*— leva, pois, a iterações em que a matriz X é alterada no sentido de: aumentar x_{rs} tanto quanto possível, de 0 até um máximo de q; a determinar; subtrair q a um (só) outro elemento da mesma linha ou coluna; prosseguir com as somas e subtracções de q, alternando movimentos horizontais e verticais até fechar o «ciclo» de alterações, alterando apenas posições já previamente «preenchidas».

Designando por $d = d_{rs}$, a variação, Dz, da função objectivo, após uma iteração é dada por

$$\Delta z = q\, d$$

Como d é escolhido negativo (ou nulo) e q é sempre positivo (finito ou infinitesimal), a variação Δz resulta negativa, i. é, a função objectivo *diminui* (não aumenta) em cada iteração, como pretendido. No caso de ser $d = 0$, a solução óptima é *múltipla*; e o caso de q infinitesimal corresponde a *degenerescência*, ilustrada na *Nota 3*.

***Nota 2:* Aplicação do "stepping-stone"**

C

		II						
III	4	1	2	6	9	100	~~1~~	2
	6	4	3	5	7	120	~~1~~	2
I	~~5~~	~~2~~	~~6~~	~~4~~	~~8~~	120	~~2~~	
	40	50	70	90	90	(340)		
	~~1~~	~~1~~	1	1	~~1~~			
	2	3			2			

num regato ou rio, para dar passagem [«Dic. da Língua Port.», Cândido de Figueiredo, 16.ª ed., Livr. Bertrand, Lisboa, 1981].

X

30^+	0	70^-	0	0
10^-	0	0^+	20	90
0	50	0	70	0

$\theta =$ (10) $z = 1430$

C'

					u_i
4	1	**2**	3	5	–2
6	3	4	**5**	**7**	**0**
5	**2**	3	**4**	6	–1
6	3	4	5	7	v_j

C–C'

$\underline{0}$	0	$\underline{0}$	3	4
$\underline{0}$	1	**–1**	$\underline{0}$	$\underline{0}$
0	$\underline{0}$	3	$\underline{0}$	2

$\delta =$ –1

40	0^+	60^-		
		10^+	20^-	90
	50^-		70^+	

(20) $z = 1420$

4	2	**2**	4	6	–1
5	3	**3**	**5**	**7**	**0**
4	**2**	2	**4**	6	–1
5	3	3	5	7	

$\underline{0}$	**–1**	$\underline{0}$	2	3
1	1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
1	$\underline{0}$	4	$\underline{0}$	2

–1

40^-	20^+	40		
		30		90
0^+	30^-		90	

Opt

(30) $z = 1400$

4	**1**	**2**	3	6	**0**
5	2	**3**	4	**7**	1
5	**2**	3	**4**	7	1
4	1	2	3	6	

$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	3	3
1	2	$\underline{0}$	1	$\underline{0}$
0	$\underline{0}$	3	$\underline{0}$	1

0

10^+	50^-	40		
		30		90
30^-	0^+		90	

Opt

(30) $z = 1400$

4	**1**	**2**	3	6	**0**
5	2	**3**	4	**7**	1
5	2	3	**4**	7	1
4	1	2	3	6	

$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	3	3
1	2	$\underline{0}$	1	$\underline{0}$
$\underline{0}$	**0**	3	$\underline{0}$	1

0

■

Outra heurística: método de Vogel

Convirá ainda referir mais um método heurístico para obter uma solução inicial próxima do óptimo, o de Vogel propriamente dito, aparentado ao anterior (talvez mais eficiente, mas mais trabalhoso). É o método tipicamente proposto na literatura.

Passo 1 – Calcule, na matriz *C* restante, a *diferença* entre os dois valores menores em cada fila (linha ou coluna) e seleccione a fila que tiver a diferença máxima.

Passo 2 – Atribua, na matriz *X*, a quantidade maior possível ao elemento mais barato da fila seleccionada.

Passo 3 – Se a atribuição feita saturou a oferta da *linha*, elimine a *linha* de *C*; se saturou a procura da *coluna*, elimine a *coluna* de *C*. (Se saturou *ambas* e esta não é a última atribuição, a solução é degenerada.) Volte ao *Passo 1*.

Nota 3: Tratamento da degenerescência (exemplo)

Técnica de resolução

C

	I				*IV*			
	38	39	31	33	32	17	1	
III	29	36	38	35	31	32	~~1~~	~~4~~
	37	35	34	32	38	15	2	
II	38	39	31	38	39	36	~~7~~	
	24	14	22	15	25	(100)		
	~~8~~	~~1~~	~~0~~	1	~~1~~			
		4	3		6			

(0) ***X***

0	0	0	0	17	17
24	0	0	0	8	32
0	14^-	0	1^+	0	15
0	$\mathbf{0}^+$	22	14^-	~~0~~ ε	36
24	14	22	15	25	

$\theta =$ (14) $z = 3224$

C'

						u_i
	30	34	24	31	**32**	–1
	29	33	23	30	**31**	–2
	31	**35**	25	**32**	33	**0**
	37	41	**31**	**38**	***39***	6
v_j	31	35	25	32	33	

C–C'

8	5	7	2	0
0	3	15	5	0
6	0	9	0	5
1	$\boxed{-2}$	0	0	0

$\delta =$ –2

Na «reacção em cadeia», ***só uma*** *das casas que diminuem se anula* (qualquer —*v. g.*, a mais barata); todas as restantes ficam com uma arbitrariamente pequena quantidade, ε. Introduzindo-a, substituímos o problema original por outro —«perturbado»—, arbitrariamente próximo dele. Quando pudermos, fazendo $e \to 0$, regressaremos ao problema original. (Rigorosamente, com vários ε, poderíamos fazer ε', ε", etc..)

(1)

				17	
24				8	
	ε		15		
	14	22		ε	**Opt**

$z = 3196$

30	32	24	29	**32**	24
29	31	23	28	**31**	23
33	**35**	27	**32**	35	27
37	**39**	**31**	36	**39**	**31**
6	8	0	5	8	

8	7	7	4	0
0	5	15	7	0
4	0	7	0	3
(1)	0	0	2	0
		1		

A solução (matemática) do problema é degenerada. A solução física tem, então (com ε = 0), apenas 6 posições preenchidas (em vez de 4 + 5 – 1 = 8).

O critério de optimalidade do "stepping-stone" (tal como é característico da Programação Linear, de que é um caso particular) é ***condição suficiente***, mas não ***necessária***. Assim, podemos já ter uma solução que é óptima (fazendo $e \to 0$) mas só nos apercebermos do facto após mais iterações. Naturalmente, esta situação só afecta casos degenerados, em que o progresso numa iteração seja «nulo» (infinitesimal), podendo mesmo o algoritmo (na forma simples apresentada) entrar em ciclo.

■

***Nota 4:* Grelha para o “stepping-stone”**

C

X

z =

C’

C – C’

z =

z =

z =

z =

■