



# Aplicação do método dos elementos finitos a problemas do campo em electromagnetismo

Jorge Emanuel Pereira Navalho\*

**Resumo**—Este relatório descreve os resultados da aplicação do método dos elementos finitos (FEM) a problemas bi-dimensionais escalares do campo electromagnético governados por equações diferenciais às derivadas parciais do tipo elíptico. Consideram-se quatro problemas distintos: a determinação do potencial escalar num condensador cilíndrico descentrado, numa linha bifilar e numa linha *microstrip* (problemas do campo eléctrico estático) e a determinação do campo eléctrico no interior de uma cavidade no domínio das micro-ondas. Para o cálculo do campo nos problemas da linha bifilar e linha *microstrip* é estabelecido o acoplamento entre o método dos elementos finitos e o métodos dos elementos de fronteira de raiz analítica (BEMA) – método híbrido FEM/BEMA. Para além da determinação do campo primário para estes problemas são também calculadas grandezas secundárias como cargas eléctricas, capacidades, coeficientes de capacidade, intensidade do campo eléctrico e densidades de energia térmica consoante o problema em questão. Todos os modelos desenvolvidos para o cálculo do campo nos problemas descritos foram submetidos a etapas rigorosas de validação, as quais são também aqui descritas. Verificou-se que os modelos implementados numericamente apresentam um desempenho adequado para os problemas que se pretendem resolver.



## 1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são uma ferramenta imprescindível na previsão de fenómenos físicos governados por modelos matemáticos conhecidos – formulados com base na observação e intensa experimentação – cuja solução analítica não é possível de determinar devido à complexidade fenomenológica, geométrica e constitutiva do sistema com interesse. Os métodos numéricos têm especial interesse prático no contexto da Engenharia Electrotécnica porque permitem assistir no projecto e desenvolvimento (incluindo optimização) de equipamentos, em que o conhecimento do campo electromagnético é determinante para o seu desempenho. A pratica-

bilidade na utilização dos métodos numéricos neste âmbito deve-se ao facto do poder computacional existente ser na maioria das vezes adequado para uma abordagem (simulação) aos equipamentos em desenvolvimento no período de tempo disponível. Desta forma é possível com recurso à simulação computacional dos campos em electrotecnia encurtar o tempo de desenvolvimento de novos equipamentos.

Um exemplo de intensa investigação académica e industrial com recurso a métodos numéricos tem sido o desempenho do campo electromagnético no interior de cavidades no domínio das micro-ondas para a promoção do aquecimento de materiais. Do ponto de vista histórico, a interacção entre as micro-ondas e os materiais foi descoberta acidentalmente em 1946 por Percy Spencer um engenheiro da Raytheon Company – empresa americana que ganhou reputação por fornecer equipamentos para radares durante a Segunda Guerra Mundial para os países aliados – quando durante o desenvolvimento de magnetrons

\* Jorge E. P. Navalho (Aluno n.º 55597).  
LASEF, Departamento de Engenharia Mecânica,  
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
✉ [jorge.navalho@tecnico.ulisboa.pt](mailto:jorge.navalho@tecnico.ulisboa.pt)  
© 218419866

Relatório entregue em Julho de 2018.

reparou que uma barra de chocolate que tinha no bolso começara a derreter devido ao aquecimento induzido por micro-ondas às quais tinha estado exposto [1], [2]. A tecnologia foi patenteada pelo próprio Percy Spencer [3] e poucos anos depois (ca. 1952) surgiu no mercado o primeiro forno micro-ondas para aplicações domésticas – aquecimento e preparação de alimentos – desenvolvido pela mesma empresa [4].

Nas últimas décadas tem-se assistido a uma expansão na utilização das micro-ondas como fonte de aquecimento – utilizada tradicionalmente no ramo alimentar (*food industry*) – para variadas aplicações. Como exemplo refira-se o processamento de materiais através da sinterização por micro-ondas de pequenas partículas de forma a produzir materiais sólidos compactos [5], a utilização das micro-ondas na indústria química para o aumento de taxas de reacção [4], a produção de carvões activados a partir de desperdícios da actividade agrícola [6] e o tratamento de resíduos [7].

Várias são as vantagens atribuídas ao aquecimento por micro-ondas relativamente ao aquecimento convencional – aquecimento eléctrico ou promovido pela queima de combustíveis fósseis, o qual requer mecanismos de transferência de calor da fonte para o objecto a aquecer. A utilização das micro-ondas permite o aquecimento em volume do material (e não de superfície) o qual está normalmente associado a menores gradientes de temperatura no interior dos materiais que se pretendem aquecer (aquecimento uniforme) [8], [2]. O aquecimento por micro-ondas é selectivo ao meio e por isso o processo de aquecimento pode ser mais eficiente do que a estratégia térmica convencional, uma vez que se dissipa energia apenas nos materiais que se pretendem aquecer (aquecimento selectivo) [8], [9]. Outra das vantagens relativamente ao processo clássico diz respeito às fases transientes de aquecimento, as quais podem ter respostas mais expeditas através da utilização das micro-ondas (respostas rápidas a transientes) [9].

No presente documento pretende-se apresentar os resultados da aplicação do método

dos elementos finitos a quatro problemas do campo electromagnético em configurações geométricas bi-dimensionais (2D). Todos os problemas são governados por equações fundamentais do tipo elíptico. Três dos problemas aqui abordados enquadram-se no contexto do campo eléctrico estático: cálculo do potencial eléctrico (campo primário) e grandezas secundárias (linhas do campo eléctrico, capacidades e coeficientes de capacidade) para o caso de um condensador cilíndrico descentrado, uma linha bifilar e uma linha *microstrip*. Estes problemas (nomeadamente o primeiro e o segundo) têm mais interesse pedagógico do que relevância prática na literatura actual. Isto deve-se à sua simplicidade o que se reflecte no facto de serem frequentemente considerados como objectos de validação de modelos matemáticos numa fase inicial da sua implementação numérica. Os problemas da linha bifilar e da linha *microstrip* são resolvidos através da combinação do método dos elementos finitos e do método dos elementos de fronteira de raiz analítica (método híbrido FEM/BEMA). Este três problemas são sugeridos como exemplos de aplicação dos métodos de elementos finitos e híbrido na referência [10]. O último problema diz respeito ao cálculo do campo eléctrico no interior de uma cavidade no domínio das micro-ondas. Este problema é frequentemente abordado na literatura, nomeadamente para aplicações de aquecimento por micro-ondas, tal como se referiu atrás.

Este relatório encontra-se organizado da seguinte forma. Após esta introdução (Secção 1), as equações fundamentais do campo electromagnético para os problemas abordados são introduzidas na Secção 2, os métodos numéricos considerados para resolver as equações fundamentais são descritos na Secção 3 e os resultados dos problemas são apresentados na Secção 4. Esta última secção encontra-se dividida em 4 subsecções, cada uma reflectindo um problema particular. Assim, na Subsecção 4.1 é abordado o problema do condensador cilíndrico descentrado, na Subsecção 4.2 o problema da linha bifilar, na Subsecção 4.3 o problema da linha *microstrip*, e finalmente, na Subsecção 4.4 o problema da cavidade em micro-ondas. O relatório termina na Secção 5 com uma breve conclusão.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS – EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações de Maxwell constituem as equações fundamentais do campo electro-magnético o qual é representado de forma compreensiva pelos vectores ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ) e ( $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ), ou seja, (intensidade do campo eléctrico, deslocamento eléctrico) e (indução magnética, intensidade do campo magnético). Estas equações formuladas na forma diferencial correspondem às Equações (1)-(4) válidas para um meio contínuo do ponto de vista macroscópico.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

Para problemas do campo eléctrico estático o segundo membro da Equação (1) é nulo (uma vez que  $\partial/\partial t = 0$ ) e deste modo a intensidade do campo eléctrico calculada pela Equação (5) permite satisfazer a Equação (1) (note que  $\text{rot grad } \phi = 0$ ). Na Equação (5),  $\phi$  corresponde ao potencial escalar do campo eléctrico (potencial eléctrico).

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (5)$$

Considerando a equação constitutiva que estabelece a relação entre os vectores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  para meios lineares e isotrópicos dada pela Equação (6) em conjunto com a Equação (5) na Equação

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (6)$$

(4) obtém-se o resultado expresso na Equação (7). Nesta equação,  $\rho$  corresponde à densidade volumica de carga eléctrica do meio e  $\varepsilon_r$  ( $\varepsilon_0$ ) à constante dieléctrica relativa do meio (constante dieléctrica do vazio). A Equação (7) corresponde à equação fundamental do campo eléctrico estático.

$$\text{div } (\varepsilon_r \text{grad } \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

Para problemas do campo electromagnético em cavidades (por exemplo, no domínio de aplicações em micro-ondas) com meios não dispersivos, a equação fundamental que permite caracterizar o campo pode ser obtida a partir da Equação (1) considerando simultaneamente, a relação constitutiva expressa pela Equação (8) e a Equação (2), tendo em conta que o meio é homogéneo e sem fontes do campo ( $\mathbf{J} = 0$  e  $\rho = 0$ ). Na Equação (8),  $\mu_0$  e  $\mu_r$  correspondem às permeabilidades magnéticas do vazio e relativa do meio, respectivamente.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (8)$$

Desta forma obtém-se a equação de onda homogénea dada pela Equação (9), onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio ( $\mu = \mu_0 \mu_r$ ) e  $\varepsilon$  é a constante dieléctrica do meio ( $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ).

$$\text{lap } \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (9)$$

Uma vez que campos vectoriais com uma dependência temporal harmónica podem ser representados por vectores de fase (ou fasor – da literatura inglesa *phasor*), a equivalência estabelecida pela Equação (10) pode ser adoptada

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv j\omega \bar{\mathbf{E}} \quad (10)$$

na formulação da Equação (9), de forma a obter a correspondente equação de onda no domínio da frequência – equação de Helmholtz homogénea (Equação (11)). Nestas equações,  $\omega$

$$\text{lap } \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mu} \varepsilon \omega^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (11)$$

corresponde à frequência angular do campo harmónico. Esta equação à semelhança da equação fundamental para o campo eléctrico estático (Equação (7)) é uma equação do tipo elíptico.

Muitos dos problemas do campo electromagnético são descritos matematicamente por equações fundamentais do tipo elíptico com a forma apresentada pela Equação (12).

$$\text{div } (\alpha \text{grad } \phi) + k^2 \phi = f \quad (12)$$

Nesta equação,  $\phi$  corresponde ao campo primário (função escalar) – uma vez que é a grandeza calculada directamente pela solução da equação (e a partir da qual se determinam

as restantes grandezas secundárias) – e  $\alpha$ ,  $k$  e  $f$  correspondem a parâmetros que reflectem as características físicas do problema e propriedades dos meios. A equação (12) com  $\alpha = C^{\text{nte}}$ ,  $k = 0$  e  $f = 0$  corresponde à equação de Laplace, com  $\alpha = C^{\text{nte}}$ ,  $k = 0$  e  $f \neq 0$  à equação de Poisson e com  $\alpha = C^{\text{nte}}$ ,  $k \neq 0$  e  $f = 0$  ( $f \neq 0$ ) à equação de Helmholtz escalar homogénea (não homogénea). Dada esta flexibilidade, a Equação (12) permite representar a equação fundamental do campo eléctrico estático (Equação (7)), considerando  $\alpha = \varepsilon_r$ ,  $k = 0$  e  $f = -\rho/\varepsilon_0$  em que o campo primário ( $\phi$ ) corresponde ao potencial eléctrico. A Equação (12) permite também descrever a Equação (11) quando aplicada a um domínio 2D em que o campo é definido apenas por uma componente (*i.e.*,  $\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_i(x, y) \mathbf{u}_i$ ), considerando  $\alpha = 1$  (notar que  $\text{lap } \phi = \text{div}(\text{grad } \phi)$ ),  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  e  $f = 0$ , em que agora o campo primário corresponde à componente não nula de  $\bar{\mathbf{E}}$  ( $\bar{E}_i$ ).

Considere-se a intensidade do campo eléctrico em coordenadas cilíndricas definida por apenas a componente segundo  $z$ , a qual apresenta exclusivamente uma dependência radial, tal como se segue (Equação (13)).

$$\mathbf{E} = E_z(r) \mathbf{u}_z \quad (13)$$

Aplicando duas vezes consecutivas o operador rotacional à intensidade do campo eléctrico dada pela Equação (13), tem-se o resultado apresentado pela Equação (14). Considerando

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z \quad (14)$$

apenas a componente segundo  $z$  – a única não nula de  $\text{rot rot } \mathbf{E}$  e tendo em conta a Equação (9) obtém-se a Equação (15). Aplicando de seguida a correspondência estabelecida pela Equação (10) na Equação (15) e tendo em conta a mudança de variável dada por  $\bar{x} = \bar{K}r$ , onde  $\bar{K} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  obtém-se a Equação (16), na qual  $\phi = \bar{E}_z$ .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

A Equação (16) é uma equação diferencial de Bessel (10). A solução analítica da Equação (16)

$$\frac{1}{\bar{x}} \frac{d\phi}{d\bar{x}} + \frac{d^2\phi}{d\bar{x}^2} + \phi = 0 \quad (16)$$

é dada pela Equação (17), onde  $J_0$  e  $Y_0$  correspondem às funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem zero, e  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes de integração.

$$\phi = \gamma_1 J_0(\bar{x}) + \gamma_2 Y_0(\bar{x}) \quad (17)$$

Para regiões cilíndricas maciças a Equação (17) reduz-se à Equação (18).

$$\phi = \gamma_0 + \gamma_1 J_0(\bar{x}) \quad (18)$$

As constantes  $\gamma_i$  existentes nas equações anteriores são obtidas através das condições de fronteira que são impostas nas superfícies cilíndricas do problema em particular. Em superfícies cilíndricas que correspondem a interfaces entre 2 regiões distintas (região 1 e região 2) é necessário ver garantido a continuidade da componente tangencial do campo eléctrico (Equação (19a)) e da componente normal do vector deslocamento eléctrico (Equação (19b)) – na qual se considera a inexistência de distribuição superficial de carga).

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (19a)$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (19b)$$

As condições de fronteira definidas pelas Equações (19a) e (19b) impostas numa superfície de separação localizada em  $r = r_j$  ( $\bar{x} = \bar{x}_j$ ) permitem estabelecer as igualdades identificadas nas Equações (20a) e (20b), respectivamente.

$$\phi(\bar{x} = \bar{x}_j^-) = \phi(\bar{x} = \bar{x}_j^+) \quad (20a)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_j^-} = \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_j^+} \quad (20b)$$

Para uma região cilíndrica maciça, considerando que a fonte do campo ( $\phi_f$ ) está imposta no eixo da região cilíndrica ( $r = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ ), tem-se a condição de fronteira de Dirichlet definida pela Equação (21), a qual contribui para a determinação da constante  $\gamma_0$  da Equação (18). (Nestas condições  $\gamma_0 = \phi_f - \gamma_1$  dado que  $J_0(0) = 1$ .)

$$\phi(\bar{x} = 0) = \phi_f \quad (21)$$



### 3 MÉTODOS NUMÉRICOS

O método dos elementos finitos (FEM – da literatura inglesa *Finite Element Method*) é utilizado neste trabalho para a obtenção da solução numérica dos problemas abordados, os quais são descritos por equações diferenciais do tipo elíptico. O método requer a decomposição do domínio de cálculo (domínio computacional) em elementos individuais de forma a constituírem na sua totalidade uma partição do domínio original – a intersecção entre elementos é nula e a união corresponde ao domínio computacional completo. Para cada elemento individual, definido topologicamente por  $N_e$  nodos, o campo aproximado  $\hat{\phi}$  em qualquer ponto  $\mathbf{x}$  no domínio do elemento é obtido através da Equação (22), onde  $k$  corresponde à ordenação topológica de cada nodo no elemento,  $\hat{\phi}_k$  é a solução aproximada do campo no nodo de ordem topológica  $k$  e  $\varphi_k^e$  é a função de base para o elemento definida de forma a ser igual a 1 no nodo  $k$  e 0 nos restantes nodos do elemento (bem como nos restantes elementos da partição).

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_e} \hat{\phi}_k \varphi_k^e(\mathbf{x}) \quad (22)$$

As funções de base são geralmente definidas recorrendo a estratégias de interpolação polinomial. A ordem de interpolação escolhida para as funções de base determina o número (bem como a posição relativa) dos nodos no elemento. Para a solução de problemas descritos por operadores diferenciais de segunda ordem (como o operador laplaciano), a menor ordem de interpolação possível para as funções de base corresponde à 1.<sup>a</sup> ordem (facto possibilitado pela consideração da formulação variacional com forma fraca). Para problemas bi-dimensionais, considerando o desenvolvimento do campo construído por funções polinomiais de primeira ordem e elementos triangulares (configuração topológica mais simples em problemas 2D), as funções de base tem a forma dada pela Equação (23), onde os coeficientes são determinados através da localização dos 3 nodos (vértices) do elemento triangular.

$$\varphi_k^e(x, y) = a_k^e + b_k^e x + d_k^e y \quad (23)$$

A solução aproximada do campo nos pontos de discretização do domínio espacial (nodos) é calculada através da resolução de um sistema de equações algébricas lineares. Este sistema de equações algébricas surge da aplicação do método de Rayleigh-Ritz à formulação variacional com a forma fraca das equações diferenciais do tipo elíptico. O sistema de equações – o qual é tratado de forma matricial através da Equação (24) – é constituído pelas contribuições de todos os elementos através das chamadas matrizes elementares de cada elemento ( $[M^e]$  e

$$[M] \left( \hat{\phi} \right) = (H) \quad (24)$$

$(H^e)$ ). A matriz  $[M^e]$  de dimensão  $N_e \times N_e$  entra em conta com os parâmetros  $\alpha$  e  $k$  da Equação (12) bem como com os coeficientes  $a_k^e$ ,  $b_k^e$  e  $d_k^e$  da Equação (23) e a área do próprio elemento. Em cada elemento, os coeficientes  $\alpha$  e  $k$  são considerados constantes. A matriz  $(H^e)$  tem dimensão  $N_e \times 1$  e considera a contribuição dos termos fonte (parâmetro  $f$  na Equação (12)) e as condições de fronteira em cada elemento.

Devido ao longo historial de aplicação e desenvolvimento do método dos elementos finitos, o seu formalismo e os detalhes que permitem a sua aplicação deixaram de se encontrar exclusivamente nos artigos científicos pioneiros da área, e existem actualmente em inúmeros livros de texto de carácter didáctico (introdutórios e avançados) em geral direccionados para um determinado campo de aplicação [10], [11], [12], [13]. Para a concretização deste trabalho considerou-se como estratégia fundamental a consulta da referência [10]. Uma vez que não se pretende aqui fornecer uma exposição longa e detalhada de todos os procedimentos necessários para a implementação do método dos elementos finitos, recomenda-se para tal a consulta da referida referência.

O método dos elementos finitos não permite ser aplicado a problemas de fronteiras abertas ou seja, a regiões não confinadas por fronteiras físicas. Pelo contrário, o método dos elementos de fronteira (BEM – *Boundary Element Method*) que se baseia numa formulação integral do campo permite ser aplicado a uma região

aberta sem fontes homogénea onde o campo é descrito por uma equação de Laplace. Desta forma para o tratamento de problemas em regiões não confinadas é possível estabelecer-se uma combinação entre os dois métodos – formando uma método híbrido – tal que o formalismo do FEM é utilizado para descrever o campo no interior da região aberta e o método BEM é considerado para descrever o campo no exterior da região aberta. O acoplamento entre os dois modelos é estabelecido através de uma fronteira fictícia (que não tem realidade física sendo apenas um artefacto auxiliar de cálculo) que separa as duas regiões. Através desta fronteira fictícia é necessário assegurar a continuidade do campo  $\phi$  e do fluxo ( $\alpha\partial\phi/\partial n$ ). A adopção de um método híbrido é assim mais adequada do que a utilização do método dos elementos finitos com condições de fronteira desapropriadas nas fronteiras livres (fictícias).

Um método híbrido particular corresponde ao método que combina o método de elementos finitos e o método dos elementos de fronteira de raiz analítica (método BEMA) – método FEM/BEMA. Neste caso, para a região exterior é aplicada uma formulação de base analítica para a descrição do campo. Considerando o método híbrido FEM/BEMA para problemas 2D em que a fronteira fictícia é descrita pela superfície de um cilindro, tem-se que a solução é obtida através da resolução da equação matricial descrita de seguida (Equação (25)). Nesta equação,  $\hat{\phi}_V$  e  $\hat{\phi}_S$  corresponde à solução aproximada do campo primário para os nodos interiores e os nodos sobre a fronteira fictícia, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} M_{VV} & M_{VS} \\ M_{SV} & M_{SS} + UG' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_V \\ \hat{\phi}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Esta equação matricial é semelhante à apresentada na Equação (24), contudo neste caso os nodos são organizados no interior das matrizes de forma a separar as equações associadas aos nodos interiores das associadas aos nodos sobre a fronteira fictícia. À matriz  $[M_{SS}]$  referente aos nodos sobre a fronteira fictícia calculada pelo formalismo do método

dos elementos finitos é adicionada a matriz  $[UG']$  a qual é calculada dependendo da configuração (simétrica ou anti-simétrica) considerada. O procedimento para o cálculo das matrizes  $[U]$  e  $[G']$  aqui considerado é o mesmo que o apresentado na referência [10]. Finalmente, refira-se que este método requer uma distribuição uniforme dos nodos ao longo da fronteira fictícia uma vez que se considera sub-adjacente ao desenvolvimento deste método a utilização da transformada discreta de Fourier.

Neste trabalho, o domínio computacional para os diferentes problemas considerados é discretizado em elementos finitos triangulares, compostos por 3 nodos uma vez que a aproximação do campo é baseada em desenvolvimentos polinomiais de 1.<sup>a</sup> ordem.

As malhas consideradas para discretizar o domínio computacional e resolver os problemas propostos neste documento foram geradas através do código DistMesh [14] desenvolvido em MATLAB (código sem interface gráfica). Este gerador de malhas não estruturadas considera a definição da geometria do domínio computacional (regiões) através de funções de distância de forma que um ponto particular do espaço pertence ou não ao domínio computacional dependendo do sinal da função de distância para as coordenadas do ponto. A localização dos nodos é otimizada através de um algoritmo que recorre à analogia entre uma malha e uma treliça (estrutura), resolvendo em cada iteração um balanço de forças para cada nó da estrutura – que corresponde a cada nodo da malha – devido à imposição de forças externas sobre os nós exteriores [15]. Deste modo os nodos da malha obtida correspondem às posições de equilíbrio dos nós da treliça. Os elementos finitos (bem como os comprimentos das barras da treliça na analogia com a mecânica aplicada) são obtidos pela rotina de triangulação de Delaunay nativa do MATLAB com base na posição dos nodos [15].

Os modelos matemáticos considerados para resolver os problemas abordados neste relatório foram implementados numericamente e resolvidos no programa de alto desempenho de cálculo numérico MATLAB (versão 2015b, 64-

bit e licença académica). Este *software* foi utilizado no âmbito deste trabalho numa máquina com um processador Intel® Core™ i7-4770 (8M Cache e até 3,90 GHz) com 24 GB de RAM. (Os tempos de computação para os modelos numéricos desenvolvidos para cada problema que à frente se referirão dizem respeito ao desempenho obtido com estas especificações de *hardware*.)

#### 4 RESULTADOS

Nesta secção são apresentados os resultados obtidos para cada um dos problemas considerados. Os problemas encontram-se dispostos por ordem crescente de complexidade em relação aos modelos matemáticos e numéricos envolvidos na sua resolução. Assim, começa-se por apresentar os resultados para o problema do condensador descentrado, resolvido através do método dos elementos finitos (Subsecção 4.1). De seguida, apresentam-se os problemas para as linhas bifilar e *microstrip* resolvidos com o método híbrido FEM/BEMA (Subsecções 4.2 e 4.3, respectivamente). Por fim, esta secção termina com um problema do campo eléctrico no interior de uma cavidade no domínio das micro-ondas, a qual é composta por diferentes regiões (Subsecção 4.4). Este último problema é resolvido através da solução numérica da equação escalar de Helmholtz com o método dos elementos finitos.

##### 4.1 Condensador Cilíndrico Descentrado

A Figura 1 apresenta a secção transversal do condensador cilíndrico descentrado. O condensador é constituído por dois condutores cilíndricos, um interno de raio  $R_{int}$  e um externo de raio  $R_{ext}$ , cujos centros distam  $\Delta c$  entre si. Os valores para os parâmetros geométricos necessários para a caracterização total do problema encontram-se na Tabela 1.

O domínio computacional onde se pretende calcular o campo primário (potencial escalar do campo eléctrico) está compreendido ao espaço dieléctrico existente entre os dois condutores (região sombreada a cinzento na Figura 1). Esta região (espaço livre) é considerada homogénea ( $\epsilon(x, y) = C^{nte}$ ) e sem fontes do campo ( $\rho =$

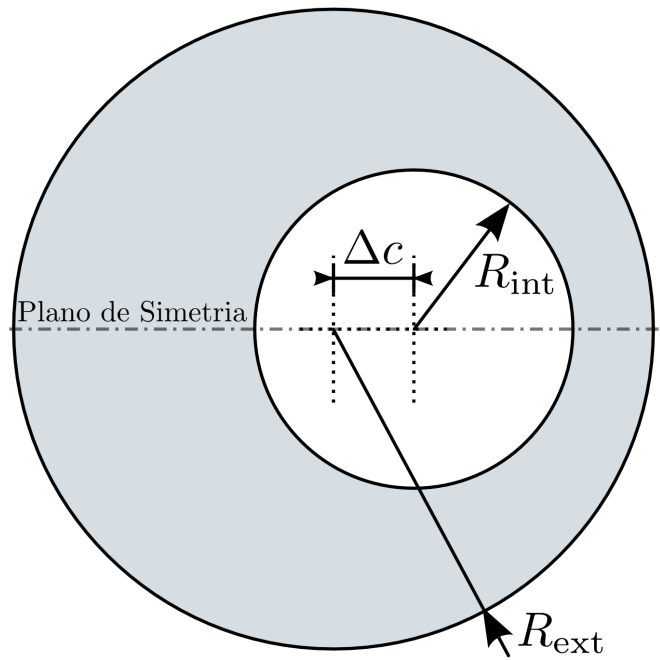


Figura 1: Secção transversal do condensador cilíndrico descentrado.

0). Consequentemente, a equação fundamental para o campo eléctrico estático, Equação (7), aplicada a estas condições reduz-se à equação de Laplace (Equação (26)) – Equação (12) com  $\alpha = \epsilon$ ,  $k = 0$  e  $f = 0$ .

$$\text{lap } \phi = 0 \tag{26}$$

Sobre a superfície condutora das duas armaduras do condensador (semi-circunferências) é aplicada uma condição de fronteira de primeiro tipo (tipo de Dirichlet) de forma a impor um valor prescrito para o campo primário. Assim, a superfície dos condutores representam duas equipotenciais (linhas de constante potencial), as quais limitam a gama de valores para o potencial escalar no interior do domínio computacional (pois não existem máximos para

Tabela 1: Parâmetros geométricos considerados para a resolução do problema do condensador cilíndrico descentrado.

Parâmetro Geométrico	Valor Normalizado [-]
Raio do condutor interior – $R_{int}$	2,0
Raio do condutor exterior – $R_{ext}$	4,0
Distância entre eixos dos condutores – $\Delta c$	1,0

o campo primário no interior do domínio pelo facto do problema ser descrito por uma equação do tipo Laplace). Como o centro do condutor cilíndrico interno está desalinhado com o centro do condutor externo apenas numa das direcções transversais ao eixo do condutor externo, então é possível retirar partido da simetria geométrica do problema (pelo “Plano de Simetria” identificado na Figura 1) e considerar apenas metade da secção transversal total do condensador descentrado. Desta forma, o custo computacional para resolver o problema é menor do que o que seria necessário se se considerasse o modelo físico original (domínio completo). Para representar a simetria geométrica do problema aplica-se uma condição de fronteira de Neumann homogénea no plano de simetria. As condições de fronteira aplicadas encontram-se resumidas de seguida (Equações (27)–(29)). Uma vez que o condutor externo é considerado como condutor de referência ( $\phi_{\text{ext}} = 0$ ),  $U$  na Equação (28) representa a tensão eléctrica aplicada ao condensador ( $U = \phi_{\text{int}} - \phi_{\text{ext}}$ ).

- Condutor Externo (Cond. de Referência):

$$\phi = 0 \quad (27)$$

- Condutor Interno (Cond. Activo):

$$\phi = U \quad (28)$$

- Plano de Simetria:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (29)$$

A solução analítica para o campo primário do problema do condensador cilíndrico descentrado pode ser calculada através da Equação (30) proveniente do problema clássico do campo eléctrico estático referente ao potencial criado por duas cargas simétricas filiformes, rectilíneas e paralelas. As constantes  $a$ ,  $O$ ,  $K$

$$\phi(x, y) = K \ln \left( \frac{\sqrt{(x - a - O)^2 + y^2}}{\sqrt{(x + a - O)^2 + y^2}} \right) - \phi_0 \quad (30)$$

e  $\phi_0$  são determinadas para as condições particulares do problema. As constantes  $a$  e  $O$  dependem das propriedades geométricas do

condensador, enquanto que as constantes  $K$  e  $\phi_0$  são determinadas de forma a reflectir o valor do potencial escalar aplicado sobre os dois condutores (condições de fronteira do tipo de Dirichlet). A Tabela 2 apresenta o valor destas constantes para os dados do problema (ver Ta-

Tabela 2: Constantes  $a$ ,  $O$ ,  $K$  e  $\phi_0$  da Equação (30) para as condições particulares do problema.

$a$ [-]	$O$ [-]	$K/U$ [-]	$\phi_0/U$ [-]
5,123475	6,500000	1,657862	1,768495

bela 1 e Equações (27) – (28)). Para o cálculo do valor analítico da capacidade por unidade de comprimento (p.u.c.) normalizada do condensador considerou-se a Equação (31) a qual requer o cálculo dos parâmetros geométricos  $k_{\text{int}}$ ,  $k_{\text{ext}}$ ,  $x_{\text{int}}/R_{\text{int}}$  e  $x_{\text{ext}}/R_{\text{ext}}$  através das Equações (32) – (33).

$$\frac{C}{2\pi\epsilon} = \ln^{-1} (k_{\text{int}}/k_{\text{ext}}) \quad (31)$$

$$k_{\text{int}} = \frac{x_{\text{int}}}{R_{\text{int}}} + \sqrt{\left(\frac{x_{\text{int}}}{R_{\text{int}}}\right)^2 - 1} \quad (32a)$$

$$k_{\text{ext}} = \frac{x_{\text{ext}}}{R_{\text{ext}}} + \sqrt{\left(\frac{x_{\text{ext}}}{R_{\text{ext}}}\right)^2 - 1} \quad (32b)$$

$$\frac{x_{\text{int}}}{R_{\text{int}}} = \frac{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2 - \Delta c^2}{2\Delta c R_{\text{int}}} \quad (33a)$$

$$\frac{x_{\text{ext}}}{R_{\text{ext}}} = \frac{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2 + \Delta c^2}{2\Delta c R_{\text{ext}}} \quad (33b)$$

Para obter a solução numérica do problema em questão foram geradas 6 malhas uniformes com diferentes dimensões de base para os elementos finitos e, conseqüentemente, com um número total distinto de elementos finitos. A Tabela 3 apresenta o número total de nodos e elementos finitos para cada malha gerada. As Figuras 2a e 2b representam as malhas 1 e 3, respectivamente. Os tempos de cálculo computacional associados à fase de processamento do código desenvolvido – tempos requeridos para o estabelecimento das equações matriciais e resolução da equação matricial global – para as



Tabela 3: Características das malhas de elementos finitos geradas para a cálculo do potencial escalar do problema do condensador cilíndrico descentrado.

Malha	N.º Nodos	N.º Elementos
1	87	129
2	244	413
3	543	973
4	1298	2425
5	3879	7454
6	8703	16952

malhas consideradas variaram de 0,03s (valor registado para a malha 1) a 1,76s (malha 6).

A Figura 3 apresenta as linhas equipotenciais (dispostas com igual incremento para o potencial escalar) calculadas de forma numérica (parte superior da figura) e de forma analítica (parte inferior da figura). A figura revela uma excelente concordância entre a solução numérica para o campo primário e a correspondente solução analítica – ver por exemplo junto ao plano de simetria ( $y \approx 0$ ) a correspondência entre as linhas equipotenciais obtidas por via numérica e analítica.

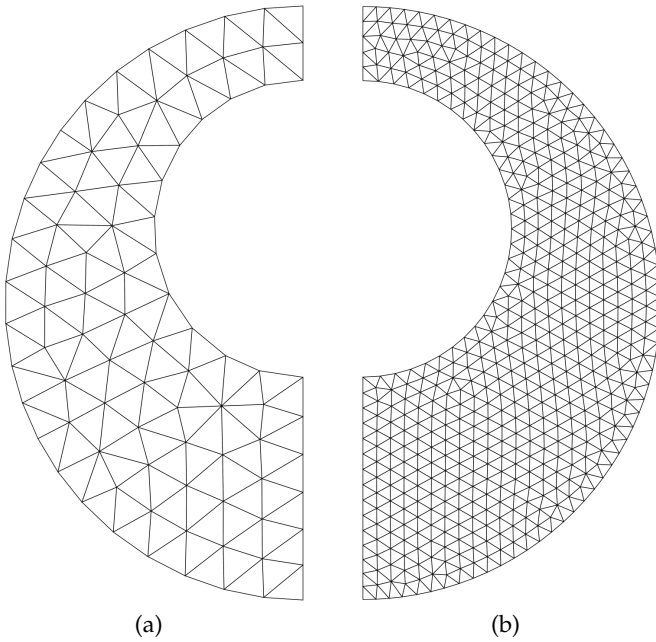


Figura 2: Malhas de elementos finitos criadas para resolver o problema do condensador cilíndrico descentrado: (a) malha 1; (b) malha 3.

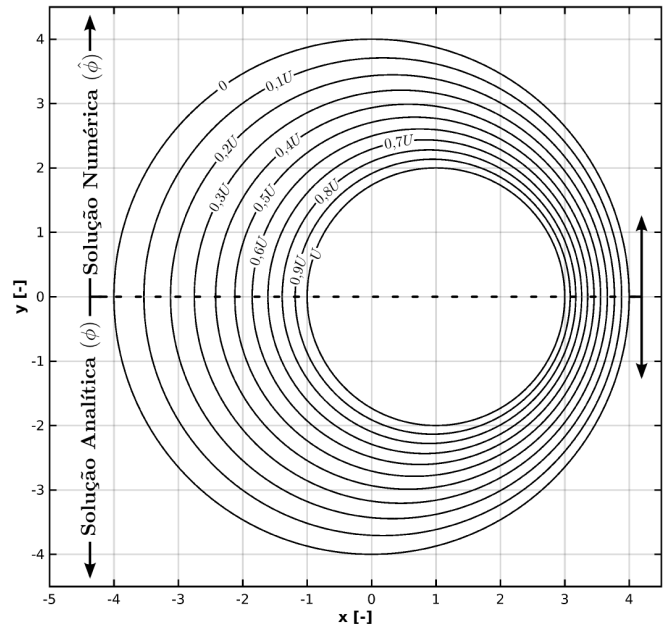


Figura 3: Isolinhas do potencial escalar (linhas equipotenciais) calculadas por via numérica (parte superior,  $y > 0$ :  $\hat{\phi}$ ) e por via analítica (parte inferior,  $y < 0$ :  $\phi$ ). (Resultados numéricos obtidos com a malha 6.)

Para cada malha considerada, a Tabela 4 apresenta diferentes métricas para avaliar o desempenho do método numérico, nomeadamente, o erro absoluto médio e máximo e a raiz do erro quadrático médio (RMSE – *Root Mean Square Error*) da solução numérica em relação à solução analítica para todo domínio computacional. Os erros absolutos (EA) e a raiz do erro quadrático médio foram calculados de acordo com as Equações (34) e (35), respectivamente. Nestas equações  $\hat{\phi}_i$  e  $\phi_{i,ref}$  correspondem aos valores numéricos (solução aproximada) e valores de referência (por exemplo solução analítica), respectivamente, para cada nodo das malhas consideradas. Os resultados apresentados na Tabela 4 estão de acordo com a concordância observada na Figura 3 entre os procedimentos numérico e analítico. Verifica-se ainda na Tabela 4 que os erros diminuem com o refinamento da malha tal como esperado.

$$EA_i = |\hat{\phi}_i - \phi_{i,ref}| \tag{34}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_i - \phi_{i,ref})^2} \quad (35)$$

Tabela 4: Erros do campo primário calculado numericamente para cada malha relativamente à solução analítica em todo o domínio computacional para o problema do condensador descentrado.

Malha	Erros <sup>a</sup> [-]		
	EA Médio	EA Máximo	RMSE
1	$5,12 \times 10^{-4}$	$3,38 \times 10^{-3}$	$8,98 \times 10^{-4}$
2	$1,34 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-3}$	$2,51 \times 10^{-4}$
3	$4,91 \times 10^{-5}$	$5,74 \times 10^{-4}$	$8,52 \times 10^{-5}$
4	$1,61 \times 10^{-5}$	$2,16 \times 10^{-4}$	$2,86 \times 10^{-5}$
5	$3,64 \times 10^{-6}$	$9,42 \times 10^{-5}$	$7,60 \times 10^{-6}$
6	$1,57 \times 10^{-6}$	$4,03 \times 10^{-5}$	$2,95 \times 10^{-6}$

<sup>a</sup> EA – Erro absoluto; RMSE – Raiz do erro quadrático médio (*root mean square error*).

A Tabela 5 apresenta os valores para a capacidade p.u.c. normalizada do condensador cilíndrico descentrado obtidos de forma numérica para as malhas consideradas, bem como o respectivo erro relativo em relação à solução analítica (solução calculada através da Equação (31)). A capacidade p.u.c. normalizada obtida numericamente foi calculada através da Equação (36), onde  $q_c$  corresponde à carga eléctrica do condensador p.u.c. calculada atra-

$$\frac{C}{2\pi\epsilon} = \frac{q_c}{2\pi\epsilon U} \quad (36)$$

vés da Equação (37). O integral do fluxo de deslocamento eléctrico ( $\epsilon(\partial\phi/\partial n) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ ) na Equação (37) ao longo do contorno do domínio que representa um dos condutores (neste trabalho, o condutor activo) com o sentido directo foi avaliado numericamente recorrendo ao próprio formalismo do método dos elementos finitos. O resultado obtido através deste procedimento para o cálculo da carga p.u.c. teve em conta com o facto do domínio computacional apenas representar metade da geometria completa do modelo físico original do condensador.

$$q_c = \int_{s_c} \left( \epsilon \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) ds \quad (37)$$

Tabela 5: Capacidade normalizada e respectivo erro relativo para cada uma das malhas consideradas.

Malha	Cap. Normalizada ( $C/2\pi\epsilon$ ) [-]	Erro Relativo (ER) <sup>a</sup> [%]
1	1,66144	$2,16 \times 10^{-1}$
2	1,65809	$1,39 \times 10^{-2}$
3	1,65794	$4,83 \times 10^{-3}$
4	1,65792	$3,62 \times 10^{-3}$
5	1,65787	$6,03 \times 10^{-4}$
6	1,65786	0

<sup>a</sup> Erro calculado em relação à solução analítica aproximada a 5 casas decimais (*i.e.*,  $(C/2\pi\epsilon)_{Anal.} = 1,65786$ ).

Em sintonia com a comparação entre a solução numérica e analítica para o campo primário, também para o cálculo de grandezas secundárias como a capacidade normalizada se verifica uma boa concordância, tal como se observa na Tabela 5. Mais uma vez o refinamento da malha (aumento do número de nodos e elementos) contribui para uma aproximação progressiva à solução analítica. Em particular, a malha 6 permite alcançar o valor da solução analítica aproximada a 5 casas decimais.

Para concluir a exposição dos resultados referentes ao problema em questão, apresenta-se na Figura 4 as linhas (*streamlines*) do campo eléctrico – outro exemplo de pós-processamento. As linhas do campo eléctrico são tangenciais aos vectores que representam a

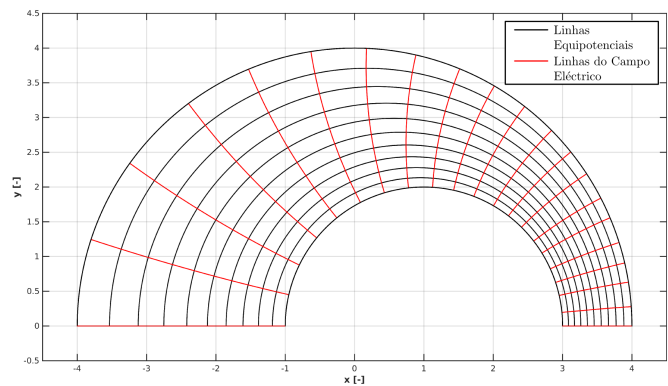


Figura 4: Linhas equipotenciais e linhas do campo eléctrico com igual incremento do potencial e do fluxo de deslocamento eléctrico, respectivamente. (Resultados numéricos obtidos com a malha 6.)

intensidade do campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) e são linhas que não se intersectam – uma vez que para cada ponto no espaço dieléctrico apenas pode existir um vector  $\mathbf{E}$  específico. As linhas equipotenciais são igualmente apresentadas na Figura 4 para demonstrar que o campo eléctrico  $\mathbf{E}$  é ortogonal às linhas equipotenciais respeitando desta forma simultaneamente a Equação (5) e a condição de fronteira imposta no plano de simetria (Equação (29)), segundo a qual a componente normal do campo eléctrico no plano de simetria é nula (ou seja  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ , onde  $\mathbf{n}$  corresponde ao versor normal ao plano de simetria).

### 4.2 Linha Bifilar

A Figura 5 apresenta a secção transversal da linha bifilar aqui considerada. A linha bifilar é constituída por dois condutores cilíndricos iguais e de raio  $R_{cond}$ , e cujos eixos distam  $2L_1$  entre si (ver Figura 5). O domínio espacial onde se pretende calcular o campo primário (potencial escalar do campo eléctrico) corresponde ao espaço livre que envolve os dois condutores e que está confinado por uma superfície cilíndrica (fronteira fictícia) localizada a uma distância de  $R_{fic}$  do centro do segmento de recta que une os centros dos dois condutores (região

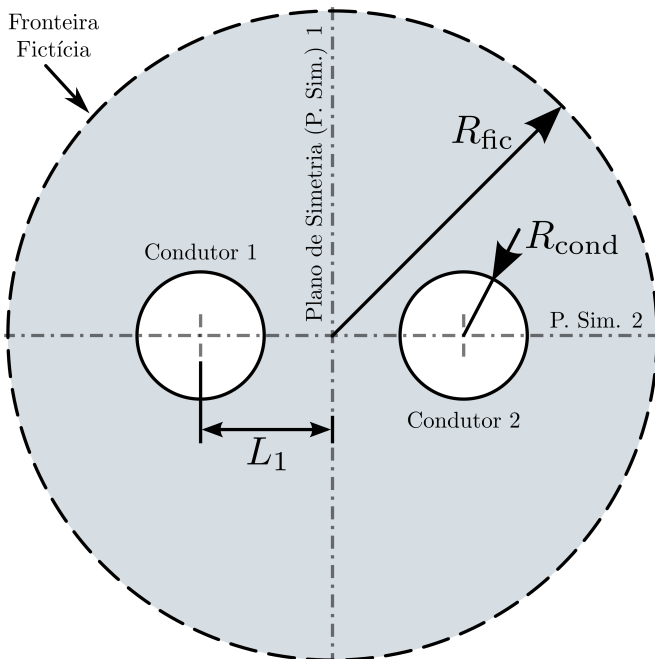


Figura 5: Secção transversal da linha bifilar.

sombreada a cinzento na Figura 5). O valor dos parâmetros que permitem caracterizar a geometria do sistema da linha bifilar acima referidos ( $R_{cond}$ ,  $L_1$  e  $R_{fic}$ ) encontra-se na Tabela 6.

Tabela 6: Parâmetros geométricos considerados para a resolução do problema da linha bifilar no espaço livre.

Parâmetro Geométrico	Valor Normalizado [-]
Raio dos condutores – $R_{cond}$	1,0
Raio da superfície fictícia – $R_{fic}$	5,0
Distância entre o eixo dos condutores e o plano de simetria $1 - L_1$	2,0

A região aberta que envolve a linha bifilar (espaço interior limitado e exterior – que tende para o infinito – à fronteira fictícia) é homogénea e não contém fontes do campo. Desta forma a equação fundamental do campo eléctrico estático para o espaço aberto (não confinado) para este problema, tal como no problema anterior corresponde à equação de Laplace (Equação (26)). O método híbrido que combina o método dos elementos finitos e o método de elementos de fronteira de raiz analítica (método híbrido FEM/BEMA) é aqui aplicado. O método dos elementos finitos é aplicado à região fechada (região interior limitada pela fronteira fictícia) e o método dos elementos de fronteira é aplicado de forma a ter em consideração o efeito da região exterior na fronteira fictícia (substituindo assim a necessidade de aplicação de uma condição de fronteira inadequada sobre a fronteira fictícia).

O problema é resolvido de duas formas equivalentes, considerando as configurações simétrica e anti-simétrica. Em ambas as configurações o domínio computacional corresponde a metade do geometria completa do modelo físico original apresentado na Figura 5. Na configuração simétrica, o domínio onde se calcula o campo primário corresponde à região envolvida pelo plano de simetria 2 (P. Sim. 2, na Figura 5) e pela fronteira fictícia. Na configuração anti-simétrica, o domínio computacional corresponde ao espaço delimitado pelo plano de simetria 1 e pela fronteira fictícia. Desta forma, um dos condutores fica com-

pletamente contido no interior da região da configuração anti-simétrica – neste trabalho considerou-se o condutor 2.

Relativamente às condições de fronteira, para a configuração simétrica considera-se sobre a superfície dos condutores as condições de fronteira de Dirichlet dadas pelas Equações (38) e (39) (de forma a impor uma tensão  $U$  na linha) e sobre o plano de simetria considera-se uma condição de fronteira de Neumann homogénea (Equação (40)). Para a configuração anti-simétrica, aplicam-se apenas condições de fronteira do tipo de Dirichlet, de valor nulo sobre o plano de simetria desta configuração (Equação (42)) – uma vez que este plano de simetria corresponde à equipotencial  $\phi = 0$  – e igual a metade da tensão  $U$  imposta na linha sobre a superfície do condutor 2 (Equação (41)).

• Configuração Simétrica

– Condutor 1:

$$\phi = -U/2 \quad (38)$$

– Condutor 2:

$$\phi = U/2 \quad (39)$$

– Plano de simetria (P. Sim. 2):

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (40)$$

• Configuração Anti-simétrica

– Condutor 2:

$$\phi = U/2 \quad (41)$$

– Plano de simetria (P. Sim. 1):

$$\phi = 0 \quad (42)$$

A solução analítica do campo primário para o problema da linha bifilar pode ser obtida através da Equação (30) onde agora as constantes  $a$ ,  $O$ ,  $K$  e  $\phi_0$  – específicas para as propriedades geométricas e condições de fronteira sobre a superfície dos condutores do problema – são dadas pela Tabela 7. O valor analítico da capacidade p.u.c normalizada da linha bifilar é calculado através da Equação (43).

$$\frac{C}{2\pi\epsilon} = \ln^{-1} \left( \frac{L_1}{R_{\text{cond}}} + \sqrt{\left(\frac{L_1}{R_{\text{cond}}}\right)^2 - 1} \right) \quad (43)$$

Tabela 7: Constantes  $a$ ,  $O$ ,  $K$  e  $\phi_0$  da Equação (30) para as condições particulares do problema.

$a$ [-]	$O$ [-]	$K/U$ [-]	$\phi_0/U$ [-]
1,732051	0	$-3,796629 \times 10^{-1}$	0

As Figuras 6a e 6b apresentam as malhas uniformes de elementos finitos criadas para resolver o problema através das duas configurações consideradas (configuração simétrica e anti-simétrica, respectivamente). As dimensões médias dos elementos (distâncias entre nodos) nas malhas de ambas as configurações são aproximadamente iguais uma vez que se forneceu o mesmo comprimento de referência ao gerador de malhas para a discretização de ambas as configurações. (O número total de nodos e elementos para cada malha encontra-se referido na legenda da Figura 6.) No procedimento de discretização do domínio espacial das duas configurações foi assegurada uma distribuição nodal uniforme ao longo da fronteira fictícia

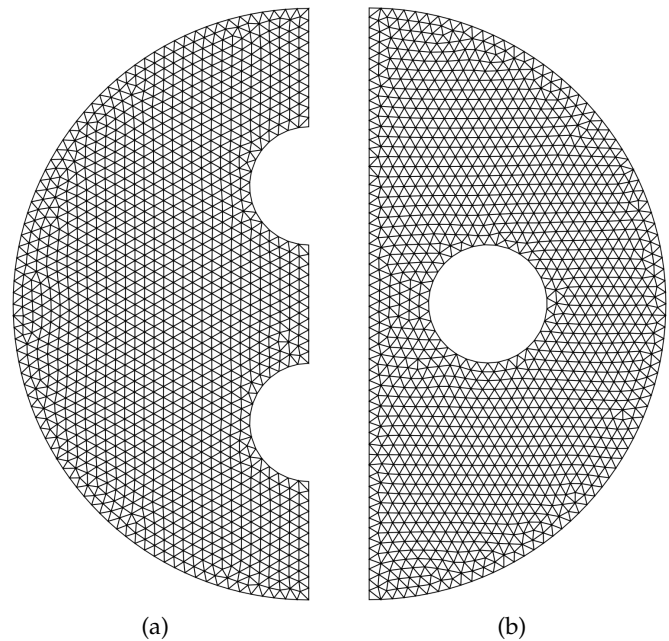


Figura 6: Malhas de elementos finitos criadas para resolver o problema da linha bifilar: (a) configuração simétrica (1279 nodos e 2409 elementos); (b) configuração anti-simétrica (1268 nodos e 2364 elementos).



– 81 nodos encontram-se colocados a igual distância sobre a fronteira fictícia.

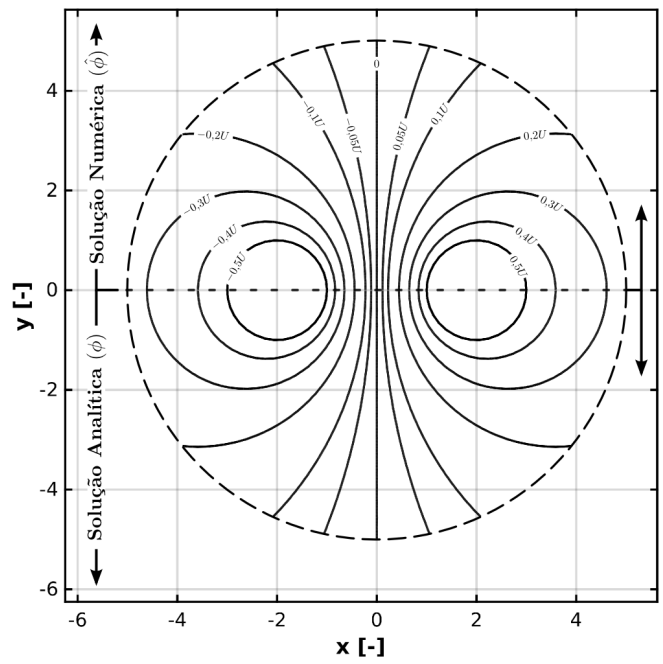
O tempo de processamento para os modelos numéricos a resolver com as malhas consideradas é inferior a 0,23s para ambas as configurações. A Tabela 8 indica os erros absolutos médio e máximo, e a raiz do erro quadrático médio para ambas as configurações. Os valores dos erros encontram-se dentro da mesma ordem de grandeza para ambas as configurações – note-se que a densidade de elementos por unidade de superfície é semelhante nas malhas de ambas as configurações (ver Figura 6).

Tabela 8: Erros do campo primário aproximado para as duas configurações relativamente à solução analítica em todo o domínio computacional para o problema da linha bifilar.

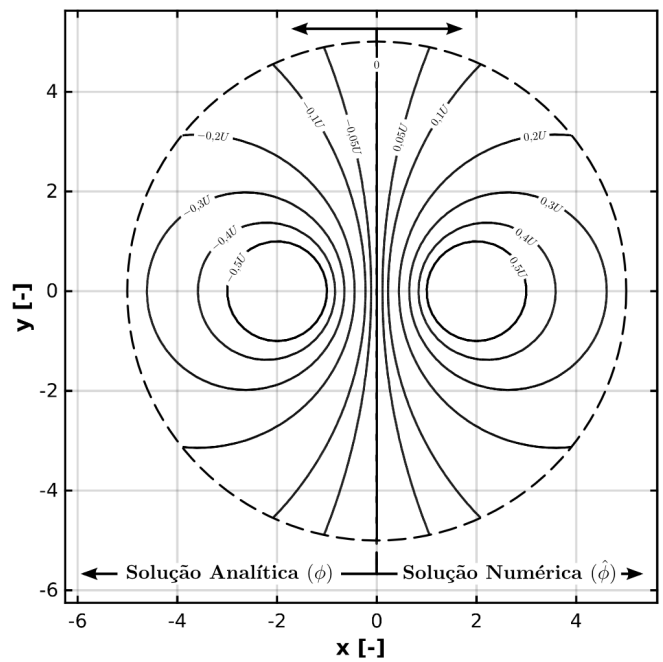
Configuração	Erros <sup>a</sup> [-]		
	EA Médio	EA Máximo	RMSE
Simétrica	$2,63 \times 10^{-5}$	$4,65 \times 10^{-4}$	$4,65 \times 10^{-5}$
Anti-simétrica	$3,33 \times 10^{-5}$	$3,79 \times 10^{-4}$	$5,10 \times 10^{-5}$

<sup>a</sup> EA – Erro absoluto; RMSE – Raiz do erro quadrático médio (root mean square error).

As Figuras 7a e 7b comparam os resultados obtidos para o campo primário através do procedimento numérico e analítico para a configuração simétrica e anti-simétrica, respectivamente. Para cada configuração as linhas do campo primário obtidas de forma analítica e numérica encontram-se representadas em metade do domínio espacial completo e de forma simétrica em relação ao plano de simetria considerado pela configuração em questão. Verifica-se um bom acordo entre as soluções numérica e analítica para as duas configurações. Verifica-se ainda na configuração simétrica (Figura 7a) a existência da linha equipotencial  $\phi = 0$ , a qual era antecipada e por isso imposta na configuração anti-simétrica através condição de fronteira aplicada no plano de simetria (P. Sim. 1). As linhas equipotenciais são semelhantes para ambas as configurações uma vez que o problema resolvido é o mesmo – o facto de se considerar um domínio espacial diferente em cada configuração é tido em conta na adopção apropriada das condições de fronteira.



(a)



(b)

Figura 7: Linhas equipotenciais obtidas por via numérica e analítica para as configurações: (a) simétrica; (b) anti-simétrica.

A capacidade p.u.c. normalizada da linha bifilar obtida de forma numérica para ambas as configurações é apresentada na Tabela 9. O mesmo procedimento descrito na subsecção anterior (Subsecção 4.1) para o cálculo do valor

numérico da carga eléctrica e capacidade p.u.c. normalizada (Equações (37) e (36), respectivamente) foi aqui aplicado. Os erros relativos para ambos os casos são inferiores a  $2,2 \times 10^{-4}$ . O erro relativo obtido para a configuração anti-simétrica é ligeiramente superior ao obtido através configuração simétrica, o que está em sintonia com o facto do erro absoluto médio e da raiz do erro quadrático médio ser ligeiramente superior para a configuração anti-simétrica (ver Tabela 8).

Tabela 9: Capacidade normalizada e respectivo erro relativo para as duas configurações consideradas para o problema da linha bifilar.

Configuração	Cap. Normalizada ( $C/2\pi\epsilon$ ) [-]	Erro Relativo (ER) <sup>a</sup> [%]
Simétrica	0,37969	$7,90 \times 10^{-3}$
Anti-simétrica	0,37974	$2,11 \times 10^{-2}$

<sup>a</sup> Erro calculado em relação à solução analítica arredondada com 5 algarismos significativos (i.e.,  $(C/2\pi\epsilon)_{Anal.} = 0,37966$ ).

A Figura 8 apresenta as linhas do campo eléctrico obtidas a partir dos resultados numéricos para a campo primário calculados pela configuração simétrica. Tal como se verificou no problema anterior (Subsecção 4.1), também neste problema as linhas do campo eléctrico são ortogonais às linhas equipotenciais. Esta evidência é particularmente observável no plano de simetria 2 ( $y = 0$ ) onde as linhas do campo eléctrico coincidem com o

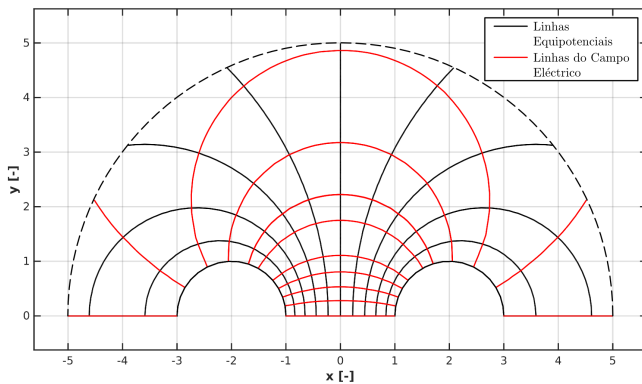


Figura 8: Linhas equipotenciais e linhas do campo eléctrico com igual incremento do potencial e do fluxo de deslocamento eléctrico, respectivamente. (Resultados numéricos obtidos com a configuração simétrica.)

mesmo e no plano de simetria 1 ( $x = 0$ ) sobre o qual as linhas do campo eléctrico apresentam um máximo.

### 4.3 Linha Microstrip

A Figura 9 representa uma linha *microstrip* suspensa no vácuo, composta por duas fitas condutoras e uma placa metálica (sistema de condutores) separadas por um substrato dieléctrico. Pretende-se calcular o potencial

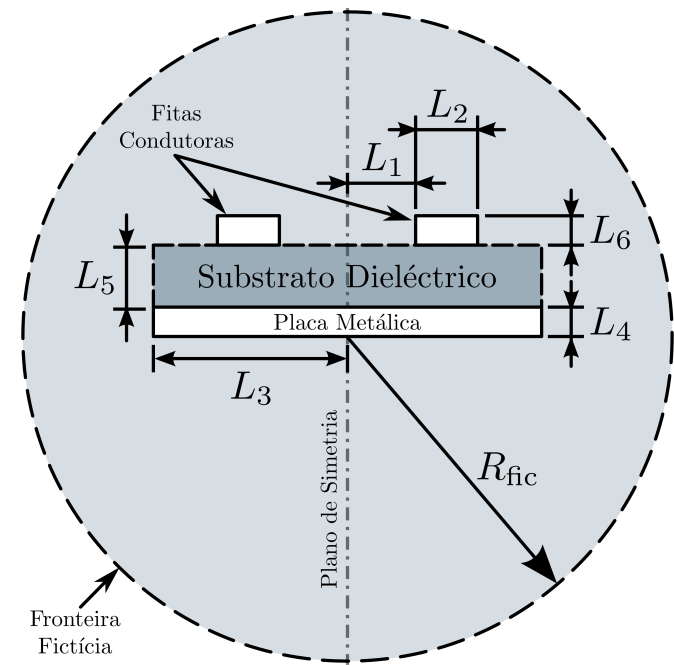


Figura 9: Secção transversal da linha *microstrip*.

eléctrico em torno do sistema de condutores, ou seja nas regiões correspondentes ao vácuo e ao substrato dieléctrico (regiões sombreadas a cinzento na Figura 9). Este domínio espacial é envolvido por uma superfície cilíndrica auxiliar (fronteira fictícia) que separa a região interior onde se pretende obter o campo primário de uma região exterior que se estende ao infinito. Na região interior, devido à existência de heterogeneidades no meio (regiões com diferentes propriedades) a equação fundamental corresponde à Equação (7) com  $\rho = 0$  (sem a existência fontes do campo) e no exterior corresponde à equação de Laplace (região homogénea e sem fontes do campo). A solução do problema requer a aplicação do método híbrido FEM/BEMA pelo facto do espaço envolvente à linha, em termos reais, não ser confinado por

nenhuma fronteira física. A Tabela 10 lista os parâmetros geométricos para os componentes da linha *microstrip* ( $L_1$  a  $L_5$ ) e para a fronteira exterior do domínio espacial ( $R_{fic}$ ) em consideração (ver Figura 9 para a identificação dos parâmetros apresentados na Tabela 10).

Este problema é resolvido para os modos simétrico e anti-simétrico aproveitando a simetria do domínio espacial considerado na Figura 9 através do plano de simetria. Desta forma, apenas metade da geometria original – domínio espacial limitado pelo plano de simetria e fronteira fictícia – será considerado como domínio computacional para ambos os modos. As condições de fronteira aplicadas sobre a fita condutora e a placa metálica são as mesmas para os dois modos: condições de fronteira do tipo de Dirichlet impondo um potencial específico  $U$  sobre a fita condutora e um potencial nulo sobre a superfície da placa metálica (Equações (44) e (45), respectivamente). Relativamente à condição de fronteira imposta sobre o plano de simetria, para o modo simétrico considera-se uma condição de fronteira de Neumann homogénea (Equação (46)) e para o modo anti-simétrico uma condição de fronteira de Dirichlet com um valor nulo para o campo primário (Equação (47)) – o plano de simetria corresponde neste modo à linha do campo primário igual a zero.

- Modo Simétrico e Anti-Simétrico

- Fita condutora:

$$\phi = U \tag{44}$$

- Placa metálica (referência das tensões eléctricas):

$$\phi = 0 \tag{45}$$

- Modo Simétrico

- Plano de simetria:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \tag{46}$$

- Modo Anti-simétrico

- Plano de simetria:

$$\phi = 0 \tag{47}$$

Para a resolução numérica do problema foram criadas 5 malhas uniformes de elementos

Tabela 10: Parâmetros geométricos considerados para a resolução do problema da linha *microstrip*.

Parâmetro Geométrico	Valor Normalizado [-]
Dimensões $L_1, L_2$ e $L_5$	1,0
Dimensões $L_6$ e $L_4$	0,5
Dimensão $L_3$	3,0
Raio da superfície fictícia – $R_{fic}$	5,0

finitos com diferentes densidades de elementos (diferentes dimensões características para os elementos). A Tabela 11 mostra o número total de nodos e o número de elementos em cada uma das regiões consideradas (substrato dieléctrico e espaço livre – vazio). A Figura 10 ilustra as malhas 1 e 2 consideradas na Tabela 11. Uma vez que se pretende aplicar o método híbrido FEM/BEMA foi garantida sobre a superfície fictícia um espaçamento constante entre nodos em todas as malhas consideradas.

Dois valores para a constante dieléctrica relativa do substrato ( $\epsilon_{r,sub}$ ) foram considerados: 1 e 2,25. O primeiro valor ( $\epsilon_{r,sub} = 1$ ) corresponde a definir apenas a existência de vácuo em torno do sistema de condutores. Para todas as combinações entre os valores da constante dieléctrica do substrato, modos e malhas, os tempos de computação associados à fase de processamento do algoritmo variaram entre 0,12 a 2,3s. Para a mesma malha e constante dieléctrica do substrato, o tempo de processamento associado ao modo simétrico verificou-se ligeiramente superior ao valor registado para o modo anti-simétrico.

Uma vez que a solução analítica do campo primário para os modos considerados neste problema não é conhecida, a validação dos

Tabela 11: Malhas de elementos finitos geradas para a cálculo do potencial escalar no problema da linha *microstrip*.

Malha	N.º Nodos	N.º Elementos	
		Sub. Diel.	Esp. Livre
1	801	169	1290
2	1409	316	2303
3	3722	536	6570
4	6951	969	12473
5	8996	1352	16145

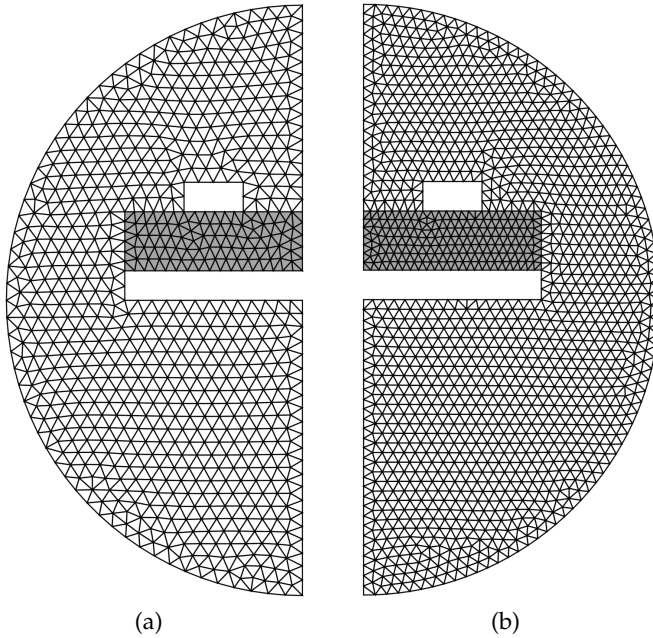
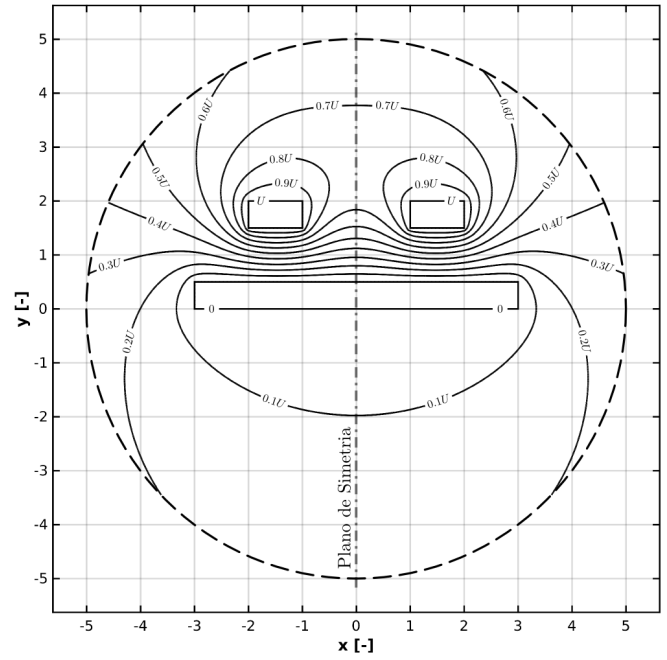


Figura 10: Malhas de elementos finitos criadas para resolver o problema da linha *microstrip*: (a) malha 1; (b) malha 2 (ver Tabela 11). Os elementos pertencentes à região ocupada pelo substrato dieléctrico encontram-se destacados a cinzento.

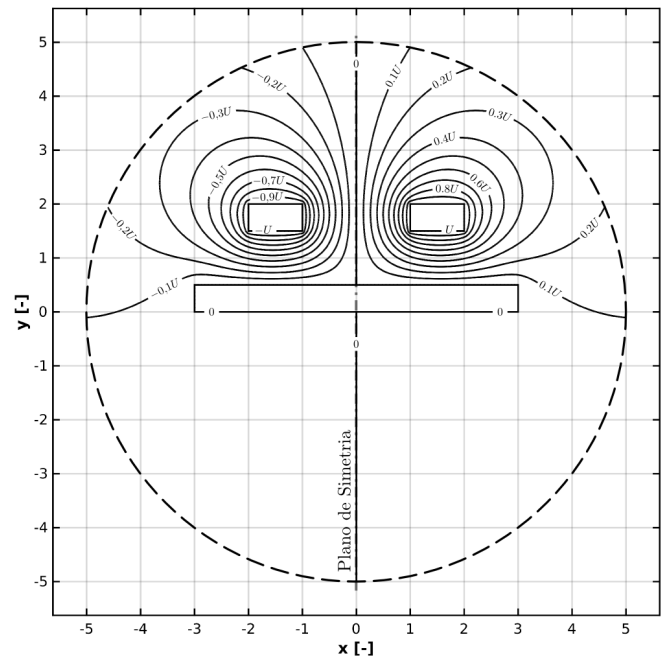
modelos matemáticos considerados e da consecutiva implementação numérica é feita através da comparação dos resultados obtidos no pós-processamento com os resultados fornecidos pela referência [10]. Estes resultados, considerados para este trabalho como resultados de referência, foram obtidos através de uma outra implementação numérica para o mesmo modelo matemático.

As Figuras 11a e 11b apresentam as linhas do campo primário considerando  $\epsilon_{r,sub} = 1$  para os modos simétrico e anti-simétrico, respectivamente, calculadas com a malha mais refinada (malha 5). Embora não se apresentem aqui os resultados de referência para as linhas equipotenciais (por não existir autorização prévia para a reprodução das figuras com interesse) verifica-se que os resultados apresentados nas Figuras 11a e 11b estão em perfeito acordo com os resultados de referência, os quais podem ser consultados nas Figuras 6.11 e 6.12 (página 210) da referência [10].

As Figuras 12a e 12b apresentam as linhas



(a)



(b)

Figura 11: Linhas equipotenciais para  $\epsilon_{r,sub} = 1$  obtidas por via numérica considerando a malha 5 para os modos: (a) simétrico; (b) anti-simétrico.

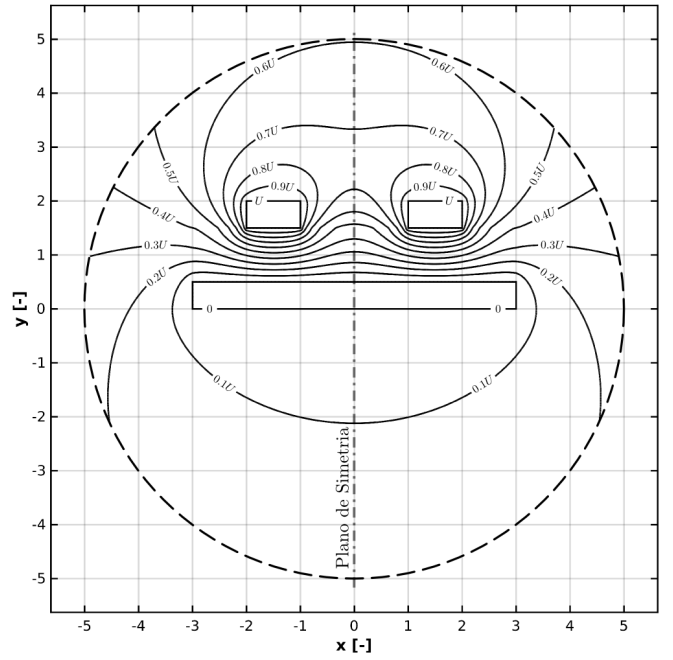
equipotenciais obtidas com  $\epsilon_{r,sub} = 2,25$  para os modos simétrico e anti-simétrico, respectivamente. As diferenças das linhas do campo primário obtidas com  $\epsilon_{r,sub} = 2,25$  e  $\epsilon_{r,sub} = 1$



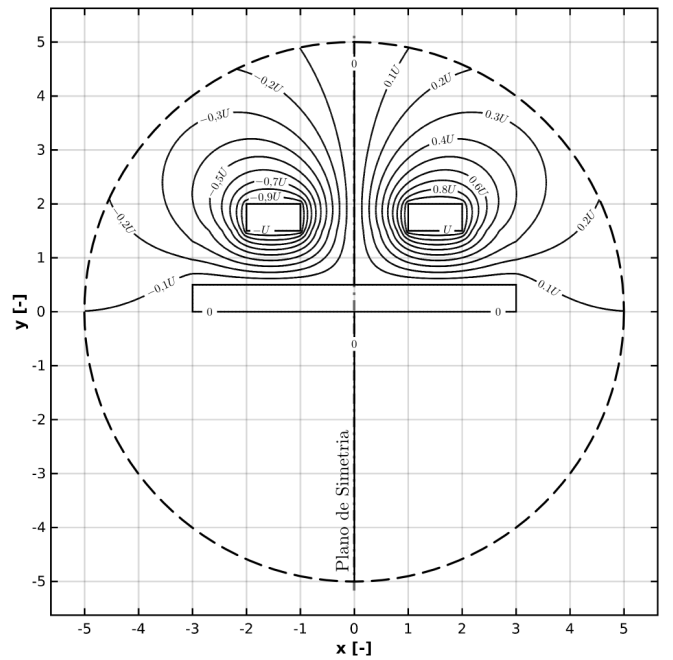
são particularmente evidentes para o modo simétrico. Estas diferenças podem ser observadas com maior facilidade a partir das Figuras 13a e 13b que apresentam para além das linhas equipotenciais as linhas do campo eléctrico, para os dois modos e para os dois valores da constante dieléctrica aqui considerados. Na superfície de separação entre o substrato dieléctrico com  $\epsilon_{r,\text{sub}} = 2,25$  e o espaço envolvente, verifica-se a existência de uma descontinuidade do gradiente das linhas do campo primário, bem com das linhas do campo eléctrico. Esta observação é a consequência da continuidade da função  $(\epsilon_r \partial\phi/\partial n)$  que o método dos elementos finitos garante através da interface entre as duas regiões de forma a respeitar a condição de fronteira  $(\mathbf{D}_{\text{sub}} - \mathbf{D}_{\text{vazio}}) \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre a superfície de separação. Para o caso em que é atribuído à região do substrato dieléctrico  $\epsilon_{r,\text{sub}} = 1$  não se verificam as descontinuidades referidas, uma vez que nesta situação o meio que envolve o sistema de condutores (onde se aplica o método dos elementos finitos) é homogéneo – deixam de existir em termos práticos interfaces entre regiões com diferentes constantes dieléctricas.

Por fim, pretende-se calcular a matriz dos coeficientes de capacidade para o sistema de condutores. A matriz dos coeficientes de capacidade pode ser calculada através da resolução de um problema único que envolve a consideração da geometria completa para o modelo físico (sem a redução da dimensão do problema através de simetria existentes) e em que um dos condutores é definido como activo e o outro como de referência. (Este procedimento foi aplicado por exemplo em [16].) Em alternativa, a matriz dos coeficientes de capacidade foi obtida considerando a solução numérica dos dois modos para o cálculo da carga por unidade de comprimento sobre a superfície que limita a fita condutora ( $q_{\text{Sim}}$  e  $q_{\text{ASim}}$ ) e tendo em consideração o sistema de equações descrito pelas Equações (48a) e (48b), onde  $C_{11}$  e  $C_{12}$  são os coeficientes de capacidade própria e mútua, respectivamente.

$$q_{\text{Sim}} = C_{11}U + C_{12}U \quad (48a)$$



(a)

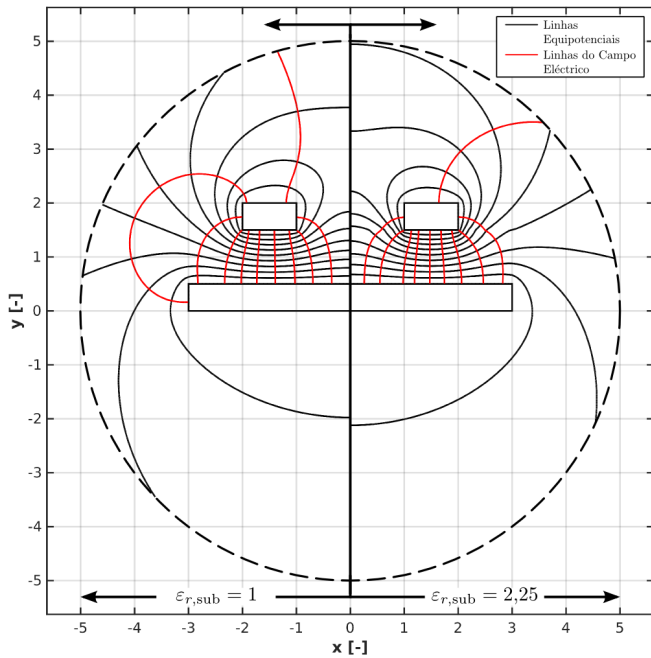


(b)

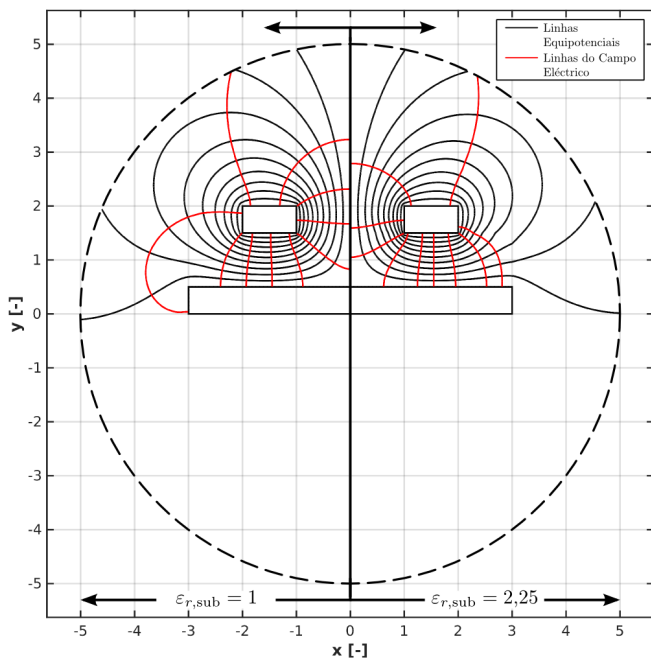
Figura 12: Linhas equipotenciais para  $\epsilon_{r,\text{sub}} = 2,25$  obtidas por via numérica considerando a malha 5 para os modos: (a) simétrico; (b) anti-simétrico.

$$q_{\text{ASim}} = C_{11}U - C_{12}U \quad (48b)$$

As Tabelas 12 e 13 apresentam para  $\epsilon_{r,\text{sub}} = 1,00$  e  $\epsilon_{r,\text{sub}} = 2,25$ , respectivamente, os elementos da matriz dos coeficientes de capacidade



(a)



(b)

Figura 13: Linhas equipotenciais e linhas do campo eléctrico para  $\epsilon_{r,sub} = 1$  ( $x < 0$ ) e  $\epsilon_{r,sub} = 2,25$  ( $x > 0$ ): (a) modo simétrico; (b) modo anti-simétrico. (Resultados numéricos obtidos com a malha 5.)

normalizados obtidos com as malhas consideradas para este problema. Os erros relativos para cada malha são calculados tendo como

referência os resultados obtidos para a malha mais refinada. Uma vez que não é conhecida a solução analítica para a matriz dos coeficientes de capacidade, considerou-se este procedimento para determinar a sensibilidade dos resultados (elementos da matriz dos coeficientes de capacidade) com a malha considerada – este procedimento corresponde a um estudo de independência da solução em relação à malha considerada. Verifica-se através deste procedimento que os erros relativos dos coeficientes de capacidade própria e mútua para os dois valores da constante dieléctrica do substrato (Tabela 12 e 13) diminuem à medida que se consideram malhas cada vez mais refinadas. Os erros relativos dos resultados obtidos para a malha 4 em relação à malha de referência (malha 5) são inferiores a 0,3%.

Os resultados para o caso  $\epsilon_{r,sub} = 2,25$  são comparados com os resultados disponíveis na referência [10]. De acordo com esta referência, os os coeficientes de capacidade própria e mútua normalizados são iguais a 0,983 e  $-0,107$ , respectivamente. Este resultados foram obtidos com uma malha uniforme (sem refinamentos locais evidentes) composta por 2052 elementos. Também é referido que estes resultados apresentam um erro inferior a 2,3% em relação aos resultados obtidos com uma discretização desconhecida através de um código comercial.

Tabela 12: Elementos da matriz dos coeficientes de capacidade normalizados e respectivos erros relativos<sup>a</sup> (ER) considerando  $\epsilon_{r,sub} = 1,00$  para cada uma das malhas consideradas.

Malha	$(C_{11}/2\pi\epsilon_0)$		$(C_{12}/2\pi\epsilon_0)$	
	Valor [-]	ER [%]	Valor [-]	ER [%]
1	0,57943	1,8886	-0,10818	3,1170
2	0,57480	1,0744	-0,10683	1,8301
3	0,57110	0,4238	-0,10563	0,6863
4	0,56932	0,1108	-0,10510	0,1811
5	0,56869	-	-0,10491	-

<sup>a</sup> Erros relativos calculados considerando como referência os resultados obtidos com a malha 5.

A Tabela 13 revela que foram obtidos para a malha mais refinada (com 17497 elementos) os valores de 0,963 e  $-0,103$  para os coeficientes de capacidade própria e mútua normalizados, respectivamente. Estes valores são relativamente

próximos dos valores de referência. Contudo, verifica-se que para malhas com um número de elementos mais próximo do número considerado na malha utilizada pelo estudo de referência (2052 elementos) – ou seja, considerando as malhas 1 e 2 – os resultados aqui obtidos encontram-se ainda mais próximos dos valores de referência.

Tabela 13: Elementos da matriz dos coeficientes de capacidade normalizados e respectivos erros relativos<sup>a</sup> (ER) considerando  $\epsilon_{r,sub} = 2,25$  para cada uma das malhas consideradas.

Malha	$(C_{11}/2\pi\epsilon_0)$		$(C_{12}/2\pi\epsilon_0)$	
	Valor [-]	ER [%]	Valor [-]	ER [%]
1	0,98620	2,4602	-0,10784	4,2638
2	0,97596	1,3963	-0,10602	2,5041
3	0,96857	0,6286	-0,10451	1,0442
4	0,96421	0,1756	-0,10373	0,2901
5	0,96252	-	-0,10343	-

<sup>a</sup> Erros relativos calculados considerando como referência os resultados obtidos com a malha 5.

#### 4.4 Cavidade em Micro-ondas

O problema abordado nesta subsecção é extraído da literatura, nomeadamente de um artigo publicado pelo jornal do Instituto de Engenheiros Químicos Americano (*AIChE Journal*) [17]. Neste artigo, os autores usam um código comercial de elementos finitos (COMSOL Multiphysics) para estudarem numericamente o desempenho do aquecimento promovido por micro-ondas num pequeno (*millisized*) reactor/permutador de calor – aqui referido simplesmente por reactor – de escoamento contínuo montado numa cavidade, considerando para tal o acoplamento entre o campo electromagnético e as equações que governam o transporte de calor e o escoamento. O reactor com geometria tubular é composto por dois tubos concêntricos. Ao tubo central é fornecida uma mistura reactiva (composta por etanol e ácido acético) cujas propriedades a identificam como altamente absorvente de radiação na gama das micro-ondas. No tubo envolvente (exterior) é promovido um escoamento anular de um fluido frigorigéneo (tolueno) transparente às micro-ondas que se pretende para o controlo da temperatura do tubo central. A

Figura 14 apresenta a secção longitudinal da cavidade (incluindo o reactor). Note que apenas metade da geometria da cavidade considerada se encontra representada na figura devido à existência de um plano de simetria. As dimensões das regiões e a identificação dos meios (e propriedades) existentes em cada região são estabelecidas nas Tabelas 14 e 15, respectivamente. A largura da porta da cavidade ( $2L_{porta}$ ) corresponde à largura do guia de onda rectangular WR340, tal como se refere no artigo de referência. Embora as dimensões da cavidade não se encontrem explicitamente definidas na referida publicação, as dimensões aqui consideradas não são muito diferentes das dimensões de referência por análise de representações esquemáticas e gráficas dos resultados existentes no artigo. Dois valores para a distância da parede condutora oposta à porta em relação à posição (fixa) do reactor (distância  $L_2$ ) foram considerados. Na Tabela 15 verifica-se que a mistura reaccional é o único meio do reactor que contribui para a dissipação de energia por apresentar um valor não desprezável para a componente complexa da permissividade relativa ( $\epsilon_r''$ ). Da referida publicação sabe-se ainda que o valor das componentes (real e complexa) da permissividade relativa

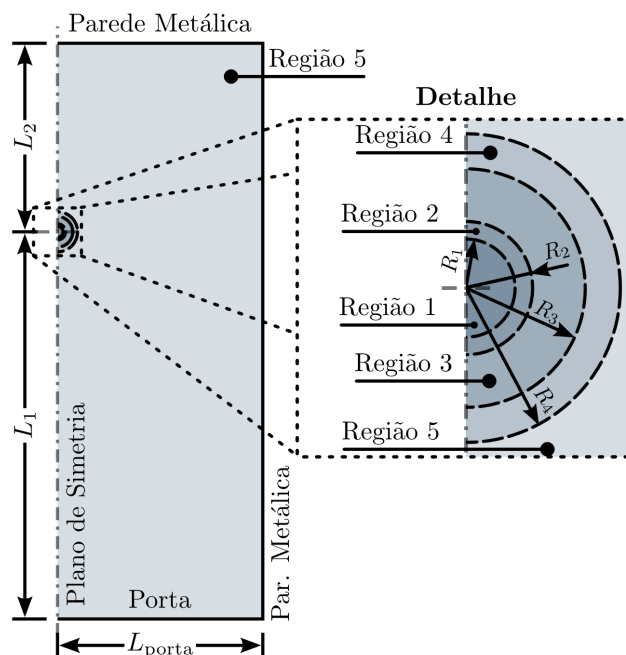


Figura 14: Representação esquemática da cavidade em micro-ondas

Tabela 14: Parâmetros geométricos considerados para a resolução do problema da cavidade em micro-ondas. (Dimensões do reactor extraídas da referência [17].)

Parâmetro Geométrico	Valor [mm]
Dimensão $L_{porta}$	43,18
Dimensão $L_1$	86,36
Dimensão $L_2$	{1; 0,8865} $L_{porta}$
Raio $R_1$	1,50
Raio $R_2$	2,00
Raio $R_3$	3,50
Raio $R_4$	4,50

Tabela 15: Meios existentes em cada região e respectivas propriedades dieléctricas. (Propriedades recolhidas da referência [17].)

Região	Material	Permitividade Relativa		Obs.
		$\epsilon'_r$ [-]	$\epsilon''_r$ [-]	
1	Mistura	11,6	7,9	310 K
	reaccional	14,7	6,3	340 K
2	Quartzo	4,2	—	—
3	Tolueno	2,4	—	—
4	Quartzo	4,2	—	—
5	Espaço livre	1,0	—	—

da mistura reaccional é dependente da temperatura. Esta dependência é indicada para a gama de temperatura 295 – 345 K. Neste trabalho consideram-se duas temperaturas para a mistura reaccional (310 e 340 K) para as quais as respectivas componentes da permitividade relativa se encontram definidas na Tabela 15.

Neste problema pretende-se calcular no domínio da frequência o campo primário que corresponde à componente segundo  $z$  (directão perpendicular ao plano da representação esquemática fornecida na Figura 14), da amplitude complexa do vector intensidade do campo eléctrico ( $\vec{E}$ ), ou seja  $\vec{E}_z$ . A equação fundamental do campo primário corresponde à equação escalar – o campo primário é uma função escalar – de Helmholtz homogénea (Equação 11). A partir do cálculo do campo primário é possível determinar a densidade de energia térmica dissipada na região da mistura reaccional, a qual pode ser posteriormente importada para a simulação do campo de térmico e hidrodinâmico. Também como objectivo deste problema pretende-se avaliar a capacidade de adaptação de soluções analíticas cilíndricas

a configurações rectangulares do campo. A vantagem da utilização de um procedimento analítico, em relação a um equivalente computacional, consiste na poupança de tempo de cálculo e memória necessária. Estes factores são preponderantes para a condução de estudos extensos de sensibilidade paramétrica e de optimização.

Antes de se proceder ao cálculo dos objectivos pretendidos para este problema considerou-se uma etapa inicial de validação aos modelos envolvidos de forma a ver garantida a sua correcta implementação numérica. Esta fase de validação consiste na comparação do campo primário com a solução analítica da equação de onda homogénea no domínio da frequência, aplicada a uma cavidade cilíndrica (região confinada) no centro da qual se encontra o reactor em consideração.

A Tabela 16 apresenta as malhas geradas para o propósito de validação e para o problema em questão. As malhas identificadas como MW\_CAV-VAL, MW\_CAV1 e MW\_CAV2 correspondem às malhas consideradas para validação e para as geometrias da cavidade do problema com  $L_2 = L_{porta}$  e com  $L_2 = 0,8865L_{porta}$ , respectivamente. Devido à disparidade existente em termos de escalas de comprimento que é necessário ter em consideração para a solução do campo, foram consideradas (ao contrário dos problemas apresentados nas secções anteriores) malhas não uniformes. Desta forma, pretende-se assegurar uma discretização apropriada nas diferentes regiões do reactor e por outro lado garantir uma poupança de elementos – que se reflecte numa economia da memória e do tempo de proces-

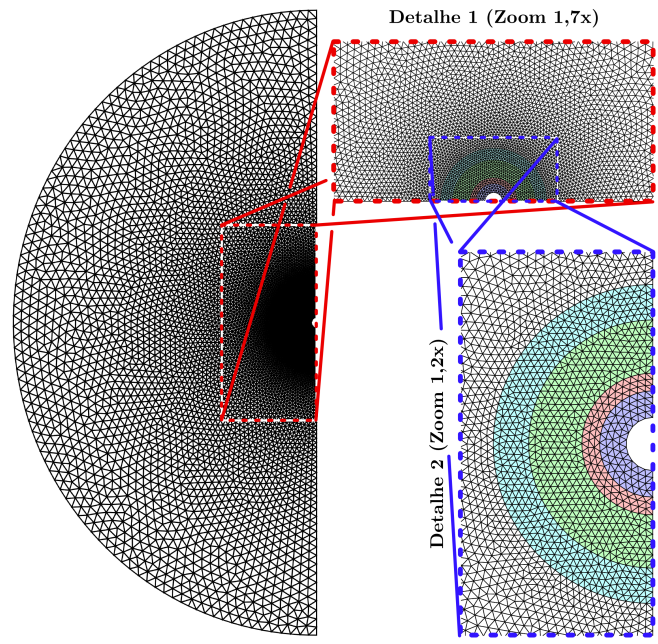
Tabela 16: Características das malhas geradas para as três geometrias (modelos físicos) consideradas: MW\_CAV-VAL – cavidade cilíndrica considerada para validação; MW\_CAV1 – cavidade rectangular com  $L_2/L_{porta} = 1$ ; MW\_CAV2 – cavidade rectangular com  $L_2/L_{porta} = 0,8865$ .

Geometria	N.º Nodos	N.º Elementos na Região:				
		1	2	3	4	5
MW_CAV-VAL	6312	125	141	701	701	10686
MW_CAV1	8077	174	144	699	701	14082
MW_CAV2	7996	174	144	701	701	13924

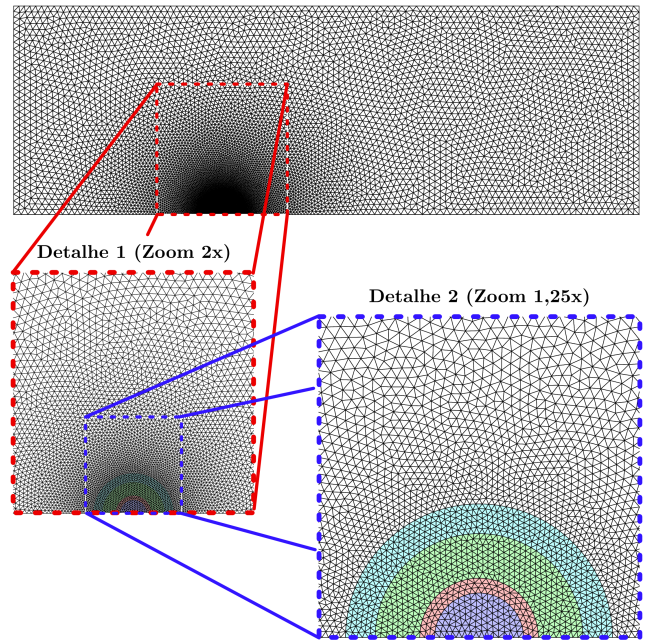


samento necessário – nas regiões envolventes ao reactor (espaço vazio da cavidade). Para as discretizações dos três domínios espaciais foram considerados os mesmos valores para os parâmetros de refinamento requeridos pelo gerador de malha. Desta forma, justifica-se o número semelhante de elementos colocados sobre o domínio do reactor para os três casos. As malhas para a cavidade cilíndrica considerada para validação e a para a cavidade do problema com  $L_2 = L_{\text{porta}}$  são apresentadas nas Figuras 15a) e 15b), respectivamente. As ampliações sucessivas às malhas no local de instalação do reactor permitem mostrar a discretização do domínio espacial ocupado por cada região do reactor. Embora para a geometria da cavidade cilíndrica de validação se pudesse aproveitar ainda mais as simetrias existentes – considerando-se apenas 1/4 do modelo físico completo da cavidade cilíndrica – o mesmo não foi considerado. Esta opção ficou a dever-se ao facto do procedimento de geração de malha (nomeadamente a definição da geometria) não ser *user-friendly* nem flexível para discretizar diferentes geometrias sem uma quantidade razoável de esforço. Assim, sem qualquer prejuízo no desempenho numérico do código de elementos finitos desenvolvido e nos objectivos de validação pretendidos, optou-se por considerar as definições geométricas das regiões do reactor consideradas na Figura 14 (*i.e.*, 1/2 do reactor em vez de 1/4 que seria a geometria suficiente) para o domínio computacional da cavidade cilíndrica de validação.

Para o caso de validação, considerou-se que o campo é excitado a uma frequência de 2,45 GHz através de uma função constante  $\phi = 0,97$  aplicada na superfície de excitação localizada em  $r = R_1/2$  (condição de fronteira de Dirichlet). ( $r = 0$  corresponde ao centro da cavidade considerada para fins de validação.) A cavidade está limitada por uma parede metálica cilíndrica perfeitamente condutora em  $r = L_{\text{porta}}$  (ver geometria da cavidade de validação na Figura 15a). Sobre esta parede aplicou-se uma condição de fronteira de Dirichlet impondo ao campo um valor nulo ( $\phi = 0$ ), de forma a ver respeitada a condição de fronteira  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{n}$  corresponde à normal à parede. No plano de simetria considerou-se uma



(a)



(b)

Figura 15: Malhas de elementos finitos criadas para resolver o problema da cavidade em micro-ondas: (a) malha considerada para validar o modelo numérico (malha MW\_CAV-VAL); (b) malha para a cavidade em consideração com  $L_2 = L_{\text{porta}}$  (malha MW\_CAV1) – ver Tabela 16.

condição de fronteira de Neumann homogénea

( $\partial\phi/\partial n = 0$ ). As condições de fronteira para o caso de validação encontram-se resumidas de seguida através das Equações (49)–(51).

- S. Excitação ( $r = R_1/2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ):

$$\phi = 0,97 \quad (49)$$

- Par. Metálica ( $r = L_{\text{porta}}, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ):

$$\phi = 0 \quad (50)$$

- P. Sim. ( $R_1/2 \leq r \leq L_{\text{porta}}, \theta = \pi/2\{-1; 1\}$ ):

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (51)$$

A Figura 16 apresenta os resultados numéricos (linhas do campo eléctrico) para o caso de validação considerando quatro condições: 1) cavidade sem reactor; 2) cavi-

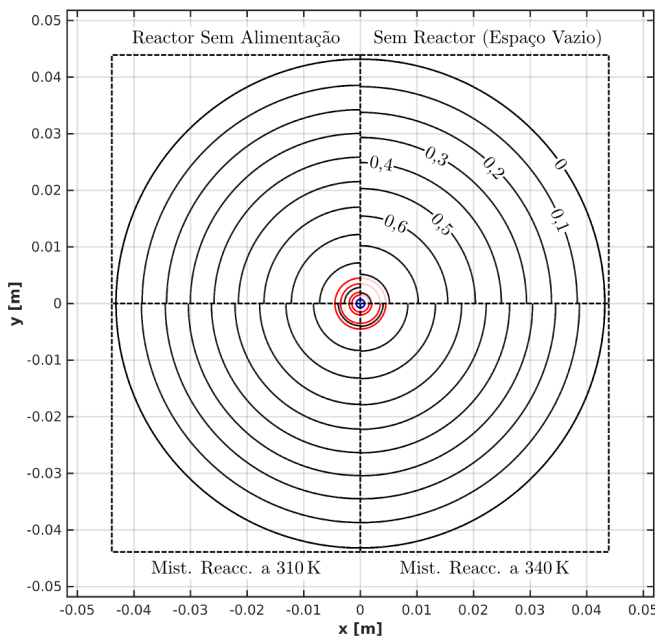


Figura 16: Linhas do campo eléctrico obtidas numericamente no contexto do esforço de validação do modelo para quatro casos: 1) sem reactor (Quadrante I); 2) com reactor mas sem alimentação (Q. II); 3) com reactor e mistura reaccional a 310 K (Q. III); 4) com reactor e mistura reaccional a 340 K (Q. IV). As interfaces entre diferentes regiões do domínio registam-se a vermelho enquanto que a superfície onde é imposto o campo primário de estímulo (porta de excitação) para toda a cavidade é identificada a azul.

de com reactor mas sem alimentação (apenas as paredes tubulares de quartzo são consideradas); 3) cavidade com reactor em que a mistura reaccional se encontra a 310 K; e 4) cavidade com reactor em que a mistura reaccional se encontra a 310 K. Devido ao facto das propriedades geométricas e dieléctricas e das condições de fronteira de Dirichlet serem invariantes com a coordenada angular ( $\theta$ ), verifica-se que as linhas do campo primário obtidas são perfeitamente cilíndricas e concêntricas com o eixo do reactor. Desta forma a solução numérica pode ser comparada com uma solução analítica considerando funções cilíndricas (funções de Bessel) ao longo da coordenada radial.

As Figuras 17a e 17b apresentam a

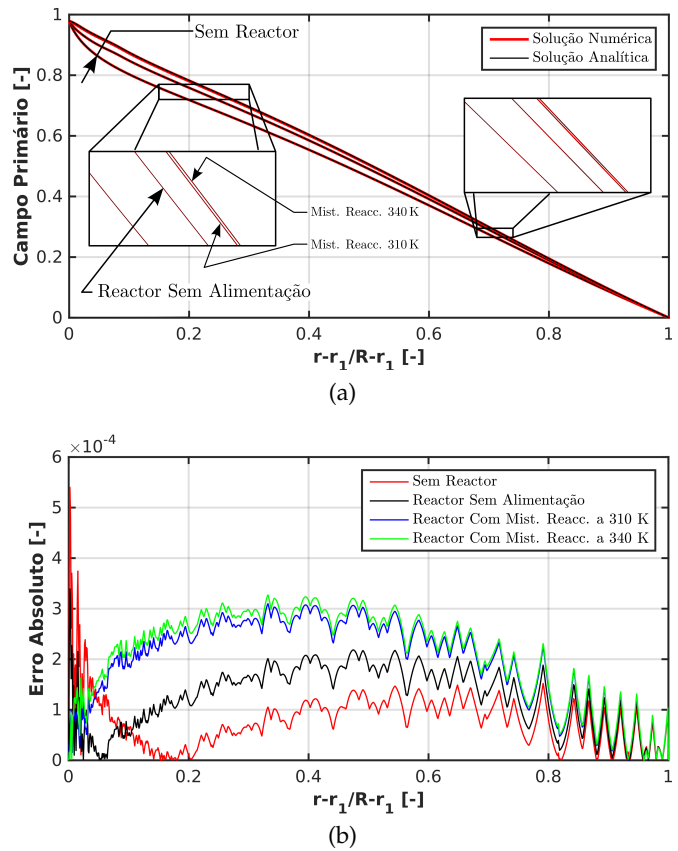


Figura 17: Comparação entre o desempenho do modelo numérico e a solução analítica para os quatro casos considerados na Figura 16: (a) perfis radiais do campo eléctrico calculados de forma numérica e analítica; (b) erro absoluto da solução numérica ao longo da coordenada radial em relação à solução analítica. ( $r_1 = R_1/2, R = L_{\text{porta}}$ .)

comparação entre o campo primário numérico e analítico e o erro absoluto da solução numérica em relação à analítica ao longo da coordenada radial (normalizada), respectivamente, para as quatro condições analisadas na Figura 16. A Tabela 17 resume os resultados da validação. Verifica-se que os resultados obtidos através da implementação numérica do método dos elementos finitos para o problema abordado nesta subsecção está em acordo bastante satisfatório com as soluções analíticas para todas as condições consideradas no interior da cavidade.

Tabela 17: Erros do campo primário aproximado para diferentes casos em relação à respectiva solução analítica.

Caso	Erros <sup>a</sup> [-]		
	EA Médio	EA Máximo	RMSE
Vazio	$7,95 \times 10^{-5}$	$5,40 \times 10^{-4}$	$9,52 \times 10^{-5}$
Reac. S/ Alim.	$1,26 \times 10^{-4}$	$3,39 \times 10^{-4}$	$1,40 \times 10^{-4}$
Mist. 310 K	$1,98 \times 10^{-4}$	$3,10 \times 10^{-4}$	$2,16 \times 10^{-4}$
Mist. 340 K	$2,11 \times 10^{-4}$	$3,27 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-4}$

<sup>a</sup> EA – Erro absoluto; RMSE – Raiz do erro quadrático médio (root mean square error).

Depois de validado o modelo, considere-se novamente o problema principal desta subsecção. Tal como no artigo de referência, o campo é excitado pelo modo TE<sub>10</sub> com uma frequência de 2,45 GHz pela porta da cavidade. O campo eléctrico,  $\bar{E}$ , contém apenas a componente segundo  $z$  (direcção normal ao plano da secção longitudinal da cavidade fornecida na Figura 14),  $\bar{E}_z$ , não nula. O campo primário,  $\phi$ , é definido como sendo igual a  $\bar{E}_z/E_0$ , onde  $E_0$  corresponde à amplitude do campo eléctrico na porta de excitação. Assim, na porta da cavidade é considerada uma condição de fronteira do tipo de Dirichlet dada pela Equação (52). Nas paredes metálicas é imposta uma condição de fronteira de Dirichlet atribuindo ao campo primário (que corresponde à componente tangencial à parede do campo eléctrico) um valor nulo (ver Equação (53)) de forma a respeitar a condição de fronteira  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , na parede perfeitamente condutora. Sobre o plano de simetria considera-se uma condição de fronteira de Neumann homogénea (Equação (54)) para garantir que a condição  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  (ou seja,

que a componente tangencial do campo  $\mathbf{H}$  seja nula), tal como é considerado no artigo de referência. De seguida, resumem-se as condições de fronteira aplicadas na cavidade do problema desta subsecção. (A origem do referencial  $(x, y)$  coincide com o eixo do reactor.)

- Porta ( $y = -L_1$ ):

$$\phi = \cos\left(\frac{\pi x}{2L_{\text{porta}}}\right) \quad (52)$$

- Paredes Metálicas ( $x = L_{\text{porta}}$  e  $y = L_2$ ):

$$\phi = 0 \quad (53)$$

- Plano Simetria ( $x = 0$ ):

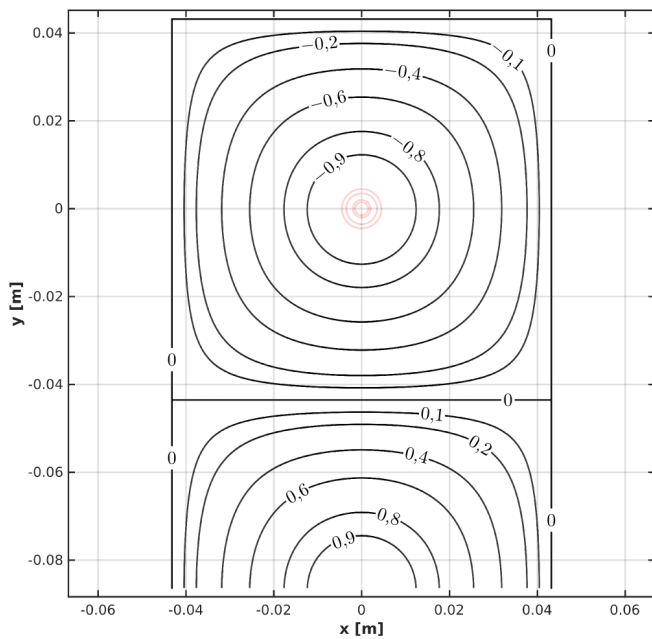
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (54)$$

Note-se que a condição de fronteira imposta na porta da cavidade (Equação (52)) permite respeitar as condições de fronteira  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  (Equação (53)) e  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  (Equação (54)) na parede metálica lateral ( $x = L_{\text{porta}}$ ) e no plano de simetria ( $x = 0$ ), respectivamente.

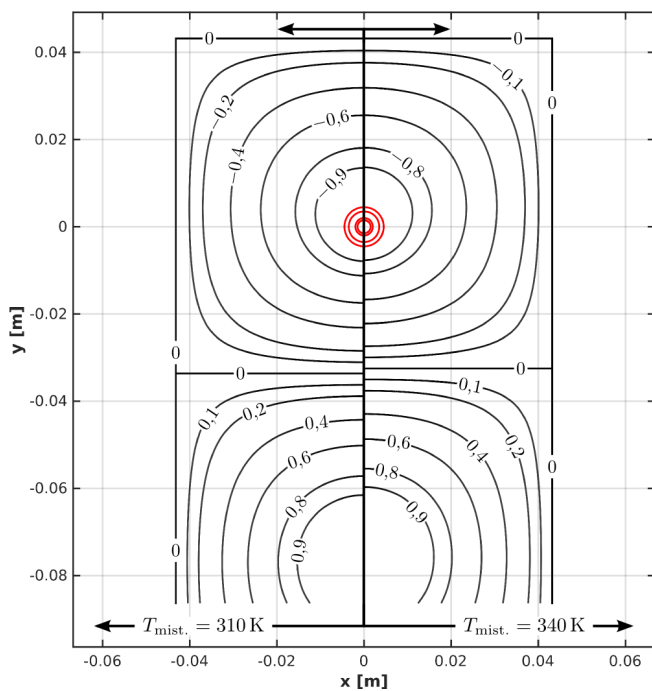
As Figuras 18a e 18b apresentam as linhas do campo primário aproximado (soluções numéricas) no interior da cavidade sem a presença do reactor e com o reactor (com duas temperaturas para a mistura reaccional), respectivamente, em que a dimensão  $L_2$  da cavidade é igual a  $L_{\text{porta}}$ . O tempo de processamento para o cálculo do campo primário para estas condições variou entre aproximadamente 5,2 (cavidade sem reactor) e 5,5s (restantes casos). Comparando as figuras em consideração, verifica-se que na presença do reactor as linhas do campo são deformadas deixando de ser concêntricas em relação ao centro do referencial (eixo do reactor), como se observa no caso da cavidade vazia. Com a presença do reactor verifica-se que as propriedades dieléctricas associadas à temperatura mais elevada (340 K) conduzem ainda de forma mais expressiva a uma deformação do campo. As diferenças entre as linhas do campo obtidas para as duas temperaturas são mais visíveis a montante do reactor ( $y < 0$ ) pois deixam de coincidir em  $x \approx 0$  de forma mais evidente.

As Figuras 19a e 19b comparam a solução numérica da Figura 18a com a solução cilíndrica analítica – considerada na fase de





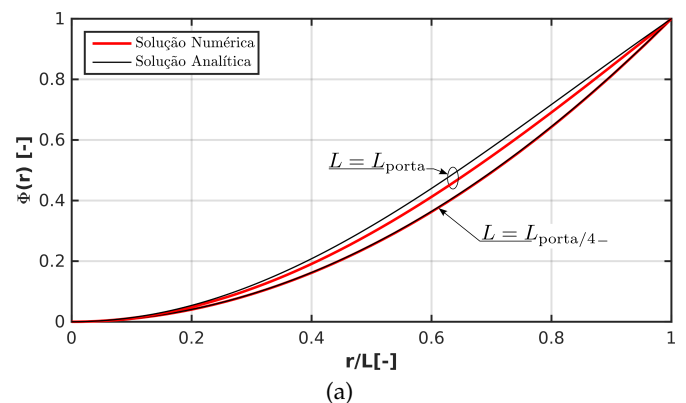
(a)



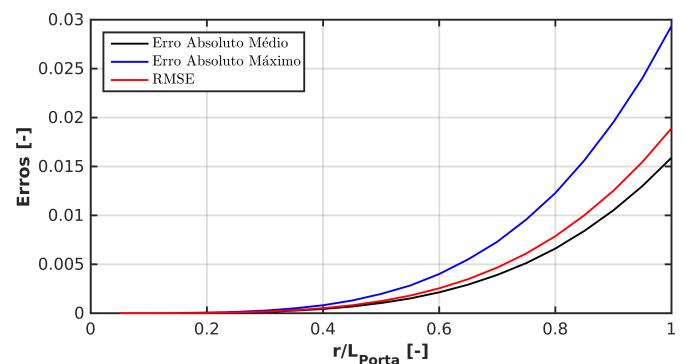
(b)

Figura 18: Linhas do campo eléctrico no interior da cavidade com  $L_2 = L_{\text{porta}}$ : (a) cavidade sem reactor (espaço vazio); (b) cavidade com reactor no interior do qual a mistura reaccional está a 310 K (esquerda) e 340 K (direita). A vermelho identificam-se as superfícies de separação entre regiões do reactor.

validação deste problema. Em particular, a Figura 19a apresenta a comparação de dois perfis do campo primário obtidos numericamente (perfis da Figura 18a) desde  $(x, y) = (0, 0)$  a  $(x, y) = (0, L)$ , em que para  $L$  se consideram dois valores. Para  $L$  mais próximo do centro das linhas do campo (ou seja  $L = L_{\text{porta}}/4$ ) verifica-se um melhor acordo da solução numérica com a solução analítica. Esta evidência é verificável para toda a gama de  $L$  que se possa considerar  $(]0; L_{\text{porta}}])$  e não apenas para os dois valores que se consideram na Figura 19a, tal como se demonstra na Figura 19b. Nesta figura (Figura 19b) conclui-se que a solução analítica cilíndrica é tanto mais adequada para a descrição do campo eléctrico numa cavidade rectangular quanto menor for a distância ao centro das linhas do campo. De



(a)



(b)

Figura 19: Comparação entre as soluções numérica e analítica para o caso sem a presença do reactor (domínio homogéneo) ao longo do eixo  $x$ : (a) perfis normalizados do campo primário ( $\Phi(r) = (\phi(r) - \phi(0)) / (\phi(L) - \phi(0))$ ); (b) erros da solução numérica em relação à solução analítica desde  $r = 0$  a  $r = L_{\text{porta}}$ .



facto, à medida que a distância ao centro das linhas do campo aumenta a geometria das linhas tende a abandonar a configuração cilíndrica para se ajustar à configuração rectangular imposta pelas paredes metálicas da cavidade (ver Figura 18a).

Procede-se de seguida à mesma análise para verificar a adequabilidade de uma aproximação de carácter analítico cilíndrico para a descrição do campo numa cavidade rectangular com o reactor no seu interior. Verifica-se na Figura 18b que o critério do campo ser concêntrico relativamente ao eixo do reactor não é respeitado para a configuração da cavidade com  $L_2/L_{porta} = 1$ .

As Figuras 20a e 20b apresentam perfis do campo primário desde  $(x, y) = (0, 0)$  até à parede metálica (segundo os eixos  $x$  e  $y$ ) para o caso apresentado na Figura 18a (Figura 20a) e para o caso do reactor com uma temperatura de 310 K para a mistura reaccional apresentado na Figura 18b (Figura 20b). Verifica-se o que

já se concluiu para o caso da cavidade vazia: as linhas do campo são concêntricas a um ponto que corresponde à origem do referencial. O mesmo não se observa no caso do reactor com a mistura a 310 K, tal como se conclui pela falta de sobreposição dos perfis segundo  $x$  e  $y$  na Figura 20b. Contudo, considerando a cavidade rectangular com a dimensão  $L_2 = 0,8865L_{porta}$ , já se verifica uma sobreposição dos referidos perfis e desta forma garante-se que para estas dimensões da cavidade as linhas do campo estão mais próximas de uma configuração concêntrica com o eixo do reactor. A Figura 21 apresenta as linhas do campo primário para a cavidade com as dimensões referidas ( $L_2 = 0,8865L_{porta}$ ) contendo no interior o reactor com a mistura reaccional a 310 K. Verifica-se por comparação entre as Figuras 18b (esquerda) e 21 que as linhas do campo estão mais centradas com o eixo do reactor para a cavidade com  $L_2 = 0,8865L_{porta}$  do que com  $L_2 = L_{porta}$ .

As Figuras 22a-22d apresentam a

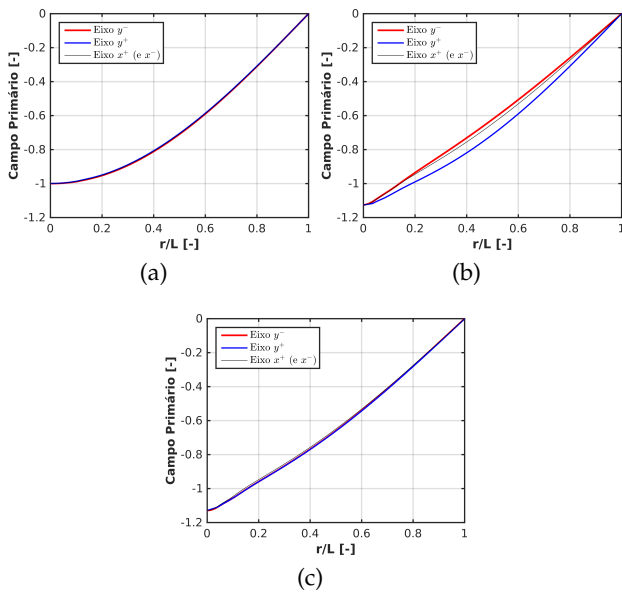


Figura 20: Perfis do campo primário desde o centro do reactor ( $r = 0$ ) até  $r = L$  (em que  $\hat{\phi}(L) = 0$ ) ao longo dos eixos  $y$  e  $x$ : (a)  $L_2/L_{porta} = 1$  sem a presença do reactor; (b)  $L_2/L_{porta} = 1$  com a presença do reactor em que a mistura reactiva está a 310 K; (c)  $L_2/L_{porta} = 0,8865$  com a presença do reactor em que a mistura reactiva está a 310 K.

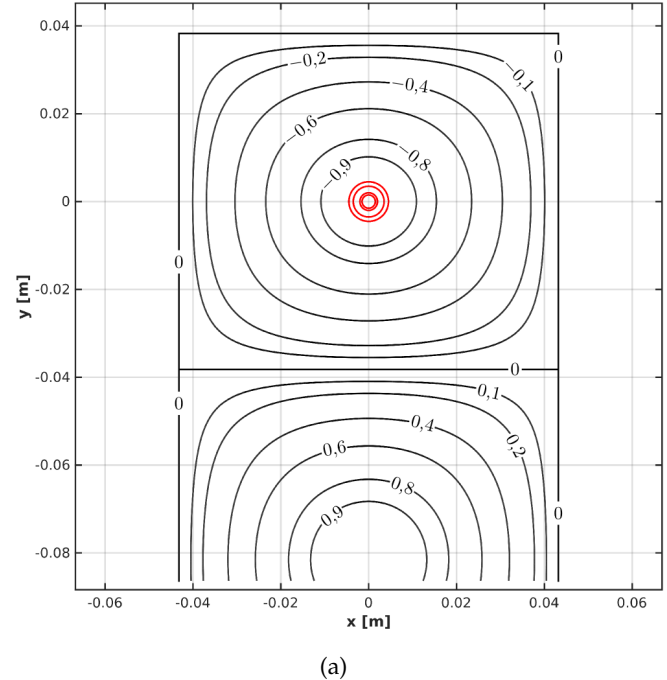


Figura 21: Linhas do campo eléctrico no interior da cavidade com  $L_2/L_{porta} = 0,8865$  considerando a presença do reactor e no interior do qual a mistura reaccional está à temperatura de 310 K.

comparação entre perfis normalizados do campo primário ao longo de  $x$  desde o eixo do reactor até  $x = L$  para o caso representado na Figura 21 e para a solução analítica cilíndrica. A Figura 22e apresenta os erros da solução numérica em relação à solução analítica cilíndrica para  $0 < r \leq L_{\text{porta}}$ , em que  $r$  é coincidente com o eixo  $x$  e centrado no eixo do reactor. Tal como no caso da cavidade vazia apresentado atrás, também aqui para distância pequenas em relação ao eixo do reactor se verificam resultados próximos entre a solução aproximada na cavidade rectangular e a solução analítica cilíndrica. Contudo, para distâncias mais elevadas ( $0,7 < r/L_{\text{porta}} < 0,75$ ) verifica-se a existência de um máximo local para os erros que decaem para valores de  $r$  superiores até  $r/L_{\text{porta}} \approx 0,87$ , voltando novamente a aumentar monotonicamente até a  $r/L_{\text{porta}} = 1$ . Este evidência não foi observada anteriormente e deve-se ao facto das linhas do campo não estarem confinadas a uma região com uma configuração quadrada (como anteriormente se observou – ver Figura 18a) mas estarem agora, devido à presença de carga na cavidade, confinadas por uma configuração rectangular – recorde-se que na Figura 21 se considera  $L_2/L_{\text{porta}} = 0,8865$  e não  $L_2/L_{\text{porta}} = 1$  como na Figura 18a. Desta forma, à medida que a distância ao eixo do reactor aumenta, a configuração geométrica das linhas do campo não varia de circular para quadrangular (como se observou na Figura 18a), mas sim de circular (quando a distância tende para zero) para uma configuração em elipse, para no fim (próximo da parede) se ajustar à configuração rectangular.

Finalmente, pretende-se determinar a densidade de energia térmica devido à exposição da mistura reaccional às micro-ondas no interior da cavidade. O mesmo procedimento considerado na publicação de referência é aqui aplicado. O valor local da densidade de energia térmica é dada pela Equação (55), onde  $E_{\text{ef}}$  corresponde ao valor eficaz, o qual é determinado através da Equação (56), em acordo com a referência [10].

$$Q_{\text{MW}} = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' E_{\text{ef}}^2 \quad (55)$$

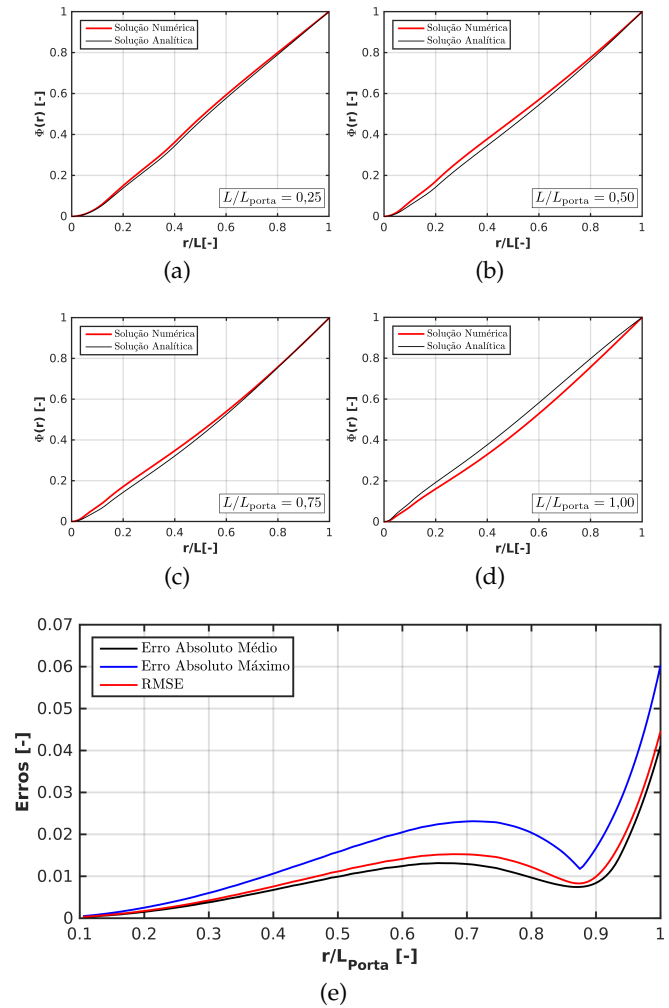


Figura 22: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a cavidade com reactor em que a temperatura da mistura reaccional é de 310K ao longo do eixo  $x$ : (a) - (d) perfis normalizados do campo primário ( $\Phi(r) = (\phi(r) - \phi(0))/(\phi(L) - \phi(0))$ ) para diferentes razões  $L/L_{\text{porta}}$ ; (e) erros da solução numérica em relação à solução analítica desde  $r = 0$  a  $r = L_{\text{porta}}$ .

$$E_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\overline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}^*)} \quad (56)$$

Uma vez que  $\overline{\mathbf{E}} = \overline{E}_z \mathbf{u}_z$  e  $\overline{E}_z = \phi/E_0$ , então a Equação (55) pode ser rescrita tendo em conta a Equação (56) através da forma dada pela Equação (57), em que  $Q_{\text{MW}}^*$  corresponde à densidade de energia térmica normalizada

$(Q_{MW}/E_0^2)$ .

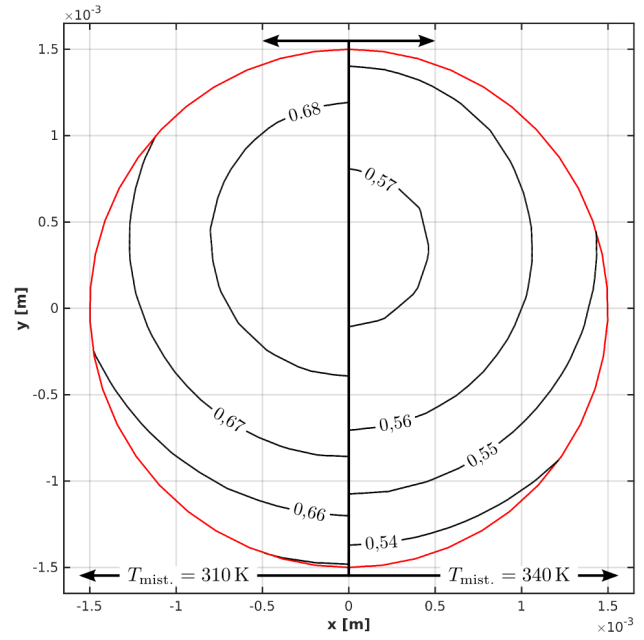
$$Q_{MW}^* = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' \phi \cdot \phi^* \quad (57)$$

A densidade de energia térmica normalizada média ( $\overline{Q_{MW}^*}$ ) é calculada como a razão entre o integral de  $Q_{MW}^*$  na superfície correspondente à Região 1 (mistura reaccional) e a correspondente área, de acordo com a Equação (58). O método de integração de Gauss-Legendre de primeira ordem foi utilizado para a avaliação do integral de  $Q_{MW}^*$  na superfície.

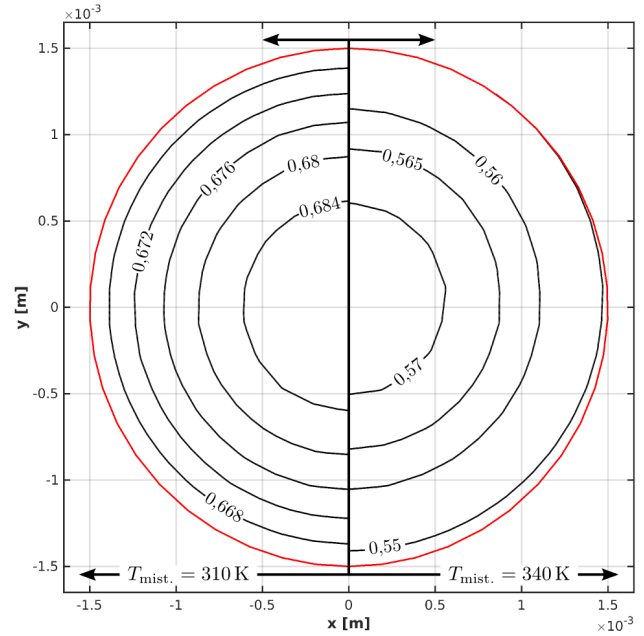
$$\overline{Q_{MW}^*} = \frac{\int Q_{MW}^* dA}{A} \quad (58)$$

As Figuras 23a e 23b apresentam a distribuição da densidade de energia térmica normalizada para as duas temperaturas consideradas da mistura reaccional (310 e 340 K) com  $L_2/L_{porta} = 1$  e  $L_2/L_{porta} = 0,8865$ , respectivamente. Verifica-se que a cavidade com  $L_2/L_{porta} = 0,8865$  promove uma distribuição mais uniforme da densidade de energia térmica para ambas as temperaturas (em particular para a mistura reaccional a 310 K). Relativamente à cavidade com  $L_2/L_{porta} = 1$ , a redução de  $L_2$  para o valor considerado permitiu diminuir o desvio padrão da densidade de energia térmica normalizada local em aproximadamente 25% e 21% para as temperaturas de 310 e 340 K, respectivamente. Este facto pode assumir grande relevância quando se pretende garantir um aquecimento o mais uniforme possível sobre a carga (amostra) submetida às micro-ondas.

A Tabela 18 resume os resultados apresentados nas Figuras 23a e 23b na forma de valores médios. Os valores médios para cada temperatura não variam significativamente com a alteração da dimensão da cavidade. Recorde-se que a mistura reaccional ocupa uma fracção muito pequena da cavidade (o raio da Região 1 onde circula a mistura reaccional é de apenas 1,5mm). É expectável que um reactor com dimensões mais elevadas cause uma deformação mais significativa no campo e que, consequentemente, variações da dimensão  $L_2$  sejam mais notáveis em termos de valores médios da densidade de energia térmica. A Tabela



(a)



(b)

Figura 23: Distribuição da densidade de energia térmica normalizada ( $Q_{MW}^* [W \cdot m^{-1} \cdot V^{-2}]$ ) na região central do reactor (Região 1 – ver Figura 14) para duas temperaturas da mistura reaccional ( $T_{mist.} = 310$  e  $340$  K) considerando: (a)  $L_2/L_{porta} = 1$ ; (b)  $L_2/L_{porta} = 0,8865$ .

18 revela ainda que para a mesma cavidade a densidade de energia térmica normalizada

obtida com a mistura reaccional a 310 K é mais elevada do que a obtida à temperatura de 340 K. Esta observação está em sintonia com as propriedades dieléctricas definidas na Tabela 15 para a mistura reaccional ( $\epsilon''_{r,mist.}(310\text{ K}) > \epsilon''_{r,mist.}(340\text{ K})$ ).

Tabela 18: Densidade de energia térmica normalizada média para duas temperaturas da mistura reaccional e para diferentes localizações da parede metálica oposta à porta da cavidade em relação ao reactor.

$L_2/L_{\text{porta}}$	$\overline{Q}_{\text{MW}}^* [\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{V}^{-2}]$	
	$T_{\text{mist.}} = 310\text{ K}$	$T_{\text{mist.}} = 340\text{ K}$
1 (MW_CAV1)	0,6712	0,5569
0,8865 (MW_CAV2)	0,6740	0,5593

## 5 CONCLUSÃO

Este relatório apresenta os resultados da aplicação do método dos elementos finitos a vários problemas do campo electromagnético, descritos matematicamente por equações diferenciais do tipo elíptico. Consideram-se três problemas do campo electrostático – condensador cilíndrico descentrado, linha bifilar e linha *microstrip* – e um problema do campo eléctrico no interior de cavidades no domínio das microondas. Uma combinação entre o método dos elementos finitos e o método dos elementos de fronteira de raiz analítica foi também considerada para a resolução de problemas de fronteiras abertas – problemas da linhas bifilar e *microstrip*. O desempenho preditivo de todos os modelos desenvolvidos foi confrontado com resultados de referência (*benchmarks*). Verificou-se para todos os modelos aqui apresentados uma boa concordância entre os seus resultados e os resultados de referência. Para além do campo primário várias grandezas secundárias foram também calculadas dependendo do problema em consideração. O presente relatório contribui assim com exemplos clássicos (e introdutórios) no contexto da simulação numérica dos campos em electrotecnia, de robustez, flexibilidade e versatilidade do método dos elementos finitos.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece a constante disponibilidade, a orientação e o apoio do Professor Vítor Maló Machado durante o desenvolvimento deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] Madhvi A. Surati, Smita Jauhari e K. R. Desai. A brief review: Microwave assisted organic reaction. *Applied Science Research*, 4(1):645–661, 2012.
- [2] S. Horikoshi, R. F. Schiffmann, J. Fukushima, N. Serpone. Microwave as a Heat Source. Em: *Microwave Chemical and Materials Processing*. Springer, Singapura, 2018.
- [3] Percy L. Spencer. *U. S. Patent*, 2495429, 1950.
- [4] Satoshi Horikoshi e Nick Serpone. Role of microwaves in heterogeneous catalytic systems. *catalysis Science & Technology*, 4:1197–1210, 2014.
- [5] Morteza Oghbaei e Omid Mirzaee. Microwave versus conventional sintering: A review of fundamentals, advantages and applications. *Journal of Alloys and Compounds*, 494:175–189, 2010.
- [6] Roozbeh Hoseinzadeh Hesas, Wan Mohd Ashri Wan Daud, J. N. Sahu e Arash Arami-Niya. The effects of a microwave heating method on the production of activated carbon from agricultural waste: A review. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 100:1–11, 2013.
- [7] D. A. Jones, T. P. Lelyveld, S. D. Mavrofidis, S. W. Kingman e N. J. Miles. Microwave heating applications in environmental engineering – a review. *Resources, Conservation and Recycling*, 34(2):75–90, 2002.
- [8] E. T. Thostenson e T. -W. Chou. Microwave processing: fundamentals and applications. *Composites: Part A*, 30:1055–1071, 1999.
- [9] C. O. Kappe e A. Stadler. Microwave Theory. Em: *Microwaves in Organic and Medicinal Chemistry* (eds. R. Mannhold, H. Kubinyi, G. Folkers, C. O. Kappe e A. Stadler). John Wiley & Sons, 2006.
- [10] Vítor Maló Machado. Simulação Computacional em Electromagnetismo. IST Press, 1.º Edição, 2018.
- [11] J. N. Reddy. An introduction to finite element method. McGraw-Hill Higher Education, 3.ª Edição, 2006.
- [12] Jian-Ming Jin. Theory and computation of electromagnetic fields. John Wiley & Sons, 2.ª Edição, 2015.
- [13] David B. Davidson. Computational Electromagnetics for RF and microwave engineering. Cambridge University Press, 2.ª Edição, 2011.
- [14] DistMesh – A Simple Mesh Generator in Matlab. Código disponível em <http://persson.berkeley.edu/distmesh/> (último acesso a 16 de Julho de 2018).
- [15] P.-O. Persson e G. Strang. A simple mesh generator in MATLAB. *SIAM Review*, 46(2):329–345, 2004.
- [16] Sarhan M. Musa, Matthew N. O. Sadiku e A. E. Shadare. Finite element analysis of microstrip transmission lines on silicon substrate. Em *Proceedings of the International Conference on Scientific Computing*, p. 155, 2015.
- [17] Narendra G. Patil, Faysal Benaskar, Jan Meuldijk, Lambertus A. Hulshof, Volker Hessel, Jaap C. Schouten, Erik D. C. Esveld e Evgeny V. Rebrov. Microwave assisted flow synthesis: Coupling of electromagnetic and hydrodynamic phenomena. *AIChE Journal*, 60(11):3824–3832, 2014.