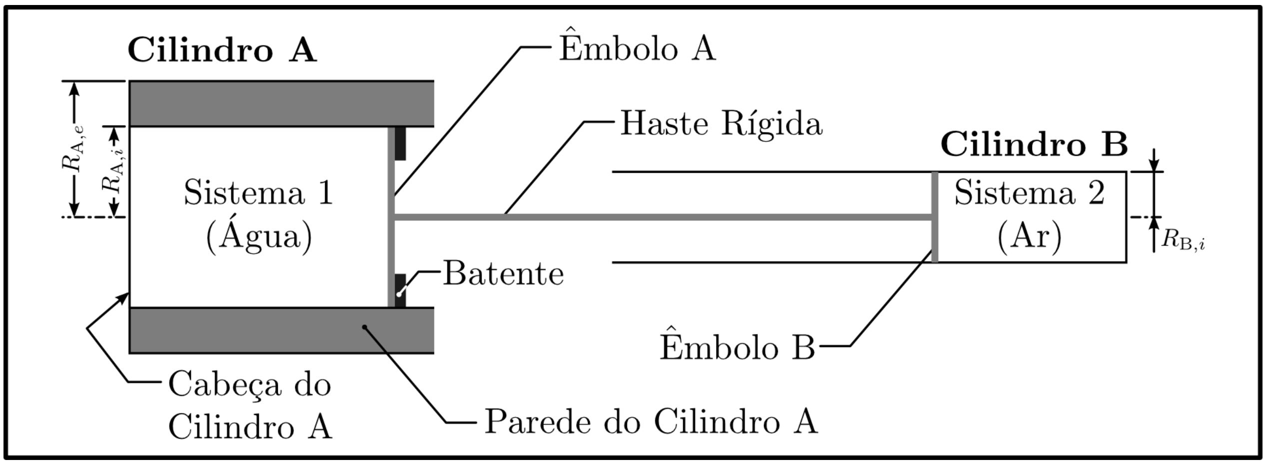
Termodinâmica e Fenómenos de Transporte

Época Especial – Problema 1

1 de Setembro de 2020 (12h00)

Considere duas montagens cilindro-pistão dispostas horizontalmente tal como apresentado na figura. O movimento dos dois êmbolos é solidário através de uma haste rígida. O Cilindro A tem um raio interior ($R_{\mathrm{A},i}$) e um raio exterior ($R_{\mathrm{A},e}$) iguais a 0,2 m e 0,3 m, respectivamente e um volume interno máximo (observado quando o Êmbolo A atinge o batente) igual a 71,6 L. O Cilindro B tem um raio interior ($R_{\mathrm{B},i}$) igual a 0,1 m e um volume interno mínimo igual a 13,0 L. No interior do Cilindro A encontram-se 100 g de água (Sistema 1) e no interior do Cilindro B encontram-se 180 g de ar (Sistema 2). A pressão do Sistema 2 é mantida constante e independente da posição dos êmbolos. A temperatura do Sistema 2 é igual a 302 K quando o Êmbolo A está em contacto com o batente. Considere o ar como gás perfeito com constante (R_{ar}) igual a 286,987 J kg^{-1} K^{-1} e calor específico a pressão constante (c_p) igual a 1017,545 J kg^{-1} K^{-1}.

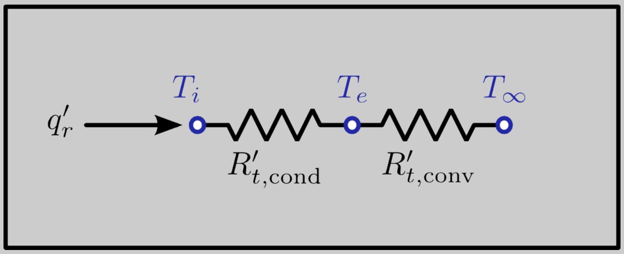


(a) (2.0 v.) Considere o Sistema 1 (água) a absorver uniformemente energia térmica (em volume) à taxa de 2,0 kW m^{-3}. Depois de absorvida pela água a energia é transferida através da parede do cilindro para um fluido no exterior do cilindro cuja temperatura e coeficiente de transferência de calor por convecção são iguais a 350 K e 100 W m^{-2} K^{-1}, respectivamente. Considere a cabeça do Cilindro A e o Êmbolo A adiabáticos. A condutibilidade térmica da parede cilíndrica é igual a 0,1 W m^{-1} K^{-1}. Determine a temperatura máxima na parede cilíndrica do Cilindro A considerando condução unidimensional em regime estacionário.

Solução:

A figura seguinte apresenta o circuito térmico equivalente para o problema de transporte de calor em consideração. T_i corresponde à temperatura que se pretende determinar – temperatura da superfície interna da parede cilíndrica do Cilindro A, a qual corresponde à temperatura máxima na parede do Cilindro A – e q'_r corresponde à taxa de transferência de calor por unidade de comprimento do cilindro.

Circuito Térmico Equivalente



A taxa de transferência de calor por unidade de comprimento do cilindro, q'_r, é calculada com base no valor da potência térmica volumétrica abosorvida pela água, $\dot{q}$ ($= 2000\,\mathrm{W\,m^{-3}}$), e na área da secção transversal do Sistema 1, $A_{\mathrm{A},i}$ ($= \pi R^2_{\mathrm{A},i}$) – ver Equação (1).

$$q'_r = \dot{q} A_{\mathrm{A},i} \Leftrightarrow q'_r = \dot{q}\pi R^2_{\mathrm{A},i} \Leftrightarrow q'_r = 2000 \times \pi \times 0{,}2^2 \Leftrightarrow q'_r = 80\pi\,\mathrm{W\,m^{-1}} \tag{1}$$

De acordo com o circuito térmico equivalente, a temperatura da superfície interna do Cilindro A, T_i, é calculada através da Equação (2).

$$\begin{aligned} q'_r = \frac{T_i - T_\infty}{R'_{t,\mathrm{cond}} + R'_{t,\mathrm{conv}}} \Leftrightarrow T_i = T_\infty + q'_r \left(R'_{t,\mathrm{cond}} + R'_{t,\mathrm{conv}}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_i = T_\infty + q'_r \left[\frac{\ln\left(R_{\mathrm{A},e}/R_{\mathrm{A},i}\right)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi R_{\mathrm{A},e} h}\right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_i = 350 + 80 \times \left[\frac{\ln\left(0{,}3/0{,}2\right)}{2 \times 0{,}1} + \frac{1}{2 \times 0{,}3 \times 100}\right] \Leftrightarrow \boxed{T_i \approx 513{,}519\,\mathrm{K}} \end{aligned} \tag{2}$$

O Êmbolo A encontra-se em contacto com o batente quando a fonte de calor do Sistema 1 é desligada. O Sistema 1 é deixado a arrefecer muito lentamente. Despreze qualquer atrito entre os êmbolos e os cilindros bem como variações de energia cinética e potencial. **Note que a pressão do Sistema 2 é mantida constante durante o movimento dos êmbolos através do fornecimento de calor. A transferência de calor para o Sistema 2 é iniciada com o movimento dos êmbolos.**

(b) (1.5 v.) Determine a temperatura do Sistema 1 no instante em que o Êmbolo A abandona o batente. (Se não determinou, considere que a pressão do Sistema 1 no instante em que o Êmbolo A abandona o batente é igual a 3 bar.)

Solução:
A temperatura do Sistema 1 no instante em que o Êmbolo A abandona o batente (T_1^{bat}) é obtida através das tabelas de vapor considerando a pressão e o volume específico do Sistema 1 nesse instante – p_1^{bat} e v_1^{bat}, respectivamente – ver Equação (3).

$$T_1^{\mathrm{bat}} = T\left(p = p_1^{\mathrm{bat}}, v = v_1^{\mathrm{bat}}\right) \tag{3}$$

As pressões nos dois sistemas estão relacionadas através do balanço de forças apresentado pela Equação (4).

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} A_{\mathrm{A}} = p_2 A_{\mathrm{B}} \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} \pi R^2_{\mathrm{A},i} = p_2 \pi R^2_{\mathrm{B},i} \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} = p_2 \left(\frac{R_{\mathrm{B},i}}{R_{\mathrm{A},i}}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} = p_2 \left(\frac{0{,}1}{0{,}2}\right)^2 \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} = \frac{p_2}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

A pressão no Sistema 2 é calculada através da aplicação da equação dos gases perfeitos, tal como se segue – ver Equação (5).

$$\begin{aligned} p_2 V_2^{\mathrm{bat}} = m_2 R_{\mathrm{ar}} T_2^{\mathrm{bat}} \Leftrightarrow p_2 = \frac{m_2}{V_2^{\mathrm{bat}}} R_{\mathrm{ar}} T_2^{\mathrm{bat}} \Leftrightarrow p_2 = \frac{0{,}180}{0{,}013} \times 286{,}987 \times 302 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_2 \approx 1{,}200 \times 10^6\,\mathrm{Pa} \Leftrightarrow p_2 \approx 12\,\mathrm{bar} \end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo o valor de p_2 calculado pela Equação (5) na Equação (4), obtém-se o valor da pressão no Sistema 1 no instante em que o Êmbolo A abandona o batente (e durante todo o movimento dos êmbolos) – ver Equação (6).

$$p_1^{\mathrm{bat}} = \frac{p_2}{4} \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow p_1^{\mathrm{bat}} = 3\,\mathrm{bar} \tag{6}$$

O volume específico do Sistema 1 no instante em consideração é calculado através da Equação (7).

$$v_1^{\mathrm{bat}} = \frac{V_1^{\mathrm{bat}}}{m_1} \Leftrightarrow v_1^{\mathrm{bat}} = \frac{0{,}0716}{0{,}1} \Leftrightarrow v_1^{\mathrm{bat}} = 0{,}716\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1} \tag{7}$$

Finalmente, substituindo-se na Equação (3) os valores para p_1^{bat} e v_1^{bat} calculados e recorrendo à tabela apropriada (Tabela A-4) obtém-se o valor pretendido para T_1^{bat} – ver Equação (8).

$$T_1^{\mathrm{bat}} = T\left(p = 3\,\mathrm{bar}, v = 0{,}716\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\right) \Leftrightarrow \boxed{T_1^{\mathrm{bat}} = 200°\mathrm{C}} \tag{8}$$

(c) (1.0 v.) Determine o calor libertado pelo Sistema 1 durante o movimento dos êmbolos, desde o instante em que o volume específico do Sistema 1 é igual a $0{,}716\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}$ até ao instante em que o volume específico é igual a $0{,}303\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}$.

Solução:

O calor libertado pelo Sistema 1 durante o intervalo de tempo em consideração, Q_1, pode ser calculado através da aplicação do princípio de conservação de energia (primeira lei da termodinâmica) ao Sistema 1 entre o instante inicial (i) e o instante final (f) – ver Equação (9).

$$\begin{aligned} \Delta U_1 = Q_1 - W_1 \Leftrightarrow U_1^f - U_1^i = Q_1 - \int_{V_1^i}^{V_1^f} p_1 dV \Leftrightarrow U_1^f - U_1^i = Q_1 - p_1\left(V_1^f - V_1^i\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_1 = \left(U_1^f + p_1 V_1^f\right) - \left(U_1^i + p_1 V_1^i\right) \Leftrightarrow Q_1 = H_1^f - H_1^i \Leftrightarrow Q_1 = m_1\left(h_1^f - h_1^i\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Na Equação (9), h_1^i e h_1^f correspondem às entalpias específicas do Sistema 1 no instante inicial e no instante final, respectivamente. No instante inicial é conhecido o volume específico do sistema ($v_1^i = 0{,}716\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}$) bem como a respectiva pressão ($p_1 = p_1^{\mathrm{bat}} = 3\,\mathrm{bar}$) e através da Tabela A-4 obtém-se a entalpia específica no instante inicial – ver Equação (10). (Note que o instante inicial do intervalo de tempo em consideração corresponde ao instante em que o Êmbolo A abandona o batente pois o volume ocupado pelo Sistema 1 corresponde ao volume máximo do Cilindro A e é referido no enunciado da alínea “durante o movimento dos êmbolos” o que descarta estados em que a pressão possa ser superior a p_1^{bat} para o mesmo volume específico ao longo dos quais não existe deslocamento dos êmbolos – ver resolução da alínea (b).)

$$h_1^i = h\left(p_1, v_1^i\right) \Leftrightarrow h_1^i = h\left(p = 3\,\mathrm{bar}, v = 0{,}716\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\right) \Leftrightarrow h_1^i = 2865{,}5\,\mathrm{kJ}\,\mathrm{kg}^{-1} \tag{10}$$

A entalpia específica no instante final é obtida através da Equação (11) uma vez que no instante final o Sistema 1 encontra-se na região bifásica líquido-vapor – pois $v_{1,\mathrm{f}}\left(p_1 = 3\,\mathrm{bar}\right) < v_1^f <$

$v_{1,\mathrm{g}}\,(p_1 = 3\,\mathrm{bar})$ de acordo com a Tabela A-3.

$$h_1^f = h_\mathrm{f}\,(p_1) + x_1^f\,[h_\mathrm{g}\,(p_1) - h_\mathrm{f}\,(p_1)] \tag{11}$$

O título de vapor da mistura bifásica no instante final, x_1^f, necessário para a Equação (11) é calculado através da Equação (12).

$$v_1^f = v_\mathrm{f}\,(p_1) + x_1^f\,[v_\mathrm{g}\,(p_1) - v_\mathrm{f}\,(p_1)] \Leftrightarrow x_1^f = \frac{v_1^f - v_\mathrm{f}\,(p_1)}{v_\mathrm{g}\,(p_1) - v_\mathrm{f}\,(p_1)} \tag{12}$$

Finalmente, substituindo-se as Equações (10), (11) e (12) na Equação (9) e considerando os valores para todas as propriedades envolvidas obtém-se o calor libertado pelo Sistema 1 no intervalo de tempo em consideração.

$$\begin{aligned} Q_1 = m_1 \left\{ h_\mathrm{f}\,(p_1) + \left[\frac{v_1^f - v_\mathrm{f}\,(p_1)}{v_\mathrm{g}\,(p_1) - v_\mathrm{f}\,(p_1)}\right][h_\mathrm{g}\,(p_1) - h_\mathrm{f}\,(p_1)] - h_1^\mathrm{bat} \right\} \Leftrightarrow Q_1 = \\ = 0{,}1 \times \left\{ 561{,}47 + \left[\frac{(0{,}303) - 1{,}0732 \times 10^{-3}}{0{,}6058 - 1{,}0732 \times 10^{-3}}\right] \times [2725{,}3 - 561{,}47] - 2865{,}5 \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_1 \approx -122{,}368\,\mathrm{kJ} \end{aligned} \tag{13}$$

Assim, o calor transferido do Sistema 1 para o exterior durante o movimento dos êmbolos, desde o instante em que o volume específico do Sistema 1 é igual a $0{,}716\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}}$ até ao instante em que o volume específico é igual a $0{,}303\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}}$ é dado pela equação seguinte.

$$\boxed{Q_1 \approx 122{,}368\,\mathrm{kJ}} \tag{14}$$

(d) (1.5 v.) Determine o deslocamento dos êmbolos quando para o Sistema 2 foram transferidos 44 kJ.

Solução:
O deslocamento dos êmbolos a partir do instante inicial até a um instante final, Δx, pode ser calculado com os volumes final e inicial do Sistema 2 (V_2^f e V_2^bat, respectivamente) e com a área de base do Cilindro B (A_B) através da Equação (15).

$$V_2^f = V_2^\mathrm{bat} + \Delta x A_\mathrm{B} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{V_2^f - V_2^\mathrm{bat}}{A_\mathrm{B}} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{V_2^\mathrm{bat}}{A_\mathrm{B}}\left(\frac{V_2^f}{V_2^\mathrm{bat}} - 1\right) \tag{15}$$

Como a pressão do Sistema 2 é mantida constante e o Sistema 2 é um sistema fechado (massa constante), tem-se pela equação dos gases perfeitos:

$$\frac{V_2^f}{V_2^\mathrm{bat}} = \frac{T_2^f}{T_2^\mathrm{bat}} \tag{16}$$

Substituindo a Equação (16) na Equação (15) obtém-se a Equação (17). A Equação (17) permite calcular o deslocamento dos êmbolos após um determinado intervalo de tempo tendo conhecimento da temperatura do Sistema 2 no final desse intervalo de tempo, T_2^f.

$$\Delta x = \frac{V_2^\mathrm{bat}}{A_\mathrm{B}}\left(\frac{V_2^f}{V_2^\mathrm{bat}} - 1\right) \Leftrightarrow \Delta x = \frac{V_2^\mathrm{bat}}{A_\mathrm{B}}\left(\frac{T_2^f}{T_2^\mathrm{bat}} - 1\right) \tag{17}$$

A temperatura do Sistema 2 no instante final (instante em que o Sistema 2 absorve 44 kJ) é calculada através da aplicação do princípio da conservação de energia (primeira lei da termodinâmica) ao Sistema 2 – ver Equação (18). A Equação (18) é manipulada de forma a obter a expressão para a razão T_2^f/T_2^{bat} necessária para a Equação (17).

$$\begin{aligned}\Delta U_2 = Q_2 - W_2 \Leftrightarrow m_2\left[u_{\mathrm{ar}}\left(T_2^f\right) - u_{\mathrm{ar}}\left(T_2^{\mathrm{bat}}\right)\right] &= Q_2 - m_2 R_{\mathrm{ar}}\left(T_2^f - T_2^{\mathrm{bat}}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m_2 c_v\left(T_2^f - T_2^{\mathrm{bat}}\right) &= Q_2 - m_2 R_{\mathrm{ar}}\left(T_2^f - T_2^{\mathrm{bat}}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{T_2^f}{T_2^{\mathrm{bat}}} = \frac{Q_2}{m_2\left(c_v + R_{\mathrm{ar}}\right)T_2^{\mathrm{bat}}} + 1 \Leftrightarrow \frac{T_2^f}{T_2^{\mathrm{bat}}} &= \frac{Q_2}{m_2 c_p T_2^{\mathrm{bat}}} + 1\end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo a razão T_2^f/T_2^{bat} dada pela Equação (18) na Equação (17) e considerando os valores para as variáveis em consideração obtém-se o valor do deslocamento pretendido – ver Equação (19).

$$\begin{aligned}\Delta x = \frac{V_2^{\mathrm{bat}}}{A_{\mathrm{B}}}\left(\frac{T_2^f}{T_2^{\mathrm{bat}}} - 1\right) \Leftrightarrow \Delta x = \frac{V_2^{\mathrm{bat}}}{A_{\mathrm{B}}}\left(\frac{Q_2}{m_2 c_p T_2^{\mathrm{bat}}}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Delta x = \frac{13\times 10^{-3}}{\pi \times 0{,}1^2}\left(\frac{44\times 10^3}{0{,}18\times 1017{,}545\times 302}\right) \Leftrightarrow \boxed{\Delta x \approx 0{,}329\,\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{19}$$