Termodinâmica e Fenómenos de Transporte

Avaliação Contínua – Problema 1
14 de Abril de 2020 (15h00)

A duração total para a resolução e submissão digital do problema é de 1h30min. A resolução de todas as alíneas do problema deve ser efectuada em folhas brancas e a qualidade (definição) da respectiva cópia digital tem de garantir a sua legibilidade. Identifique todas as folhas de resolução com o seu nome e número de aluno. É recomendável que reserve 10 min da duração total para a digitalização e submissão da sua resolução. Note que no fim da duração total a submissão da resolução é impossível. Certifique-se que resolve o seu enunciado do problema (veja caixa abaixo).

Resolução

A Figura 1 apresenta uma parede plana constituída por 4 materiais. As dimensões da parede bem como as condutibilidades térmicas dos 4 materiais encontram-se definidas na figura. A parede está isolada nas superfícies $y = 0{,}2\,\text{m}$ e $y = 0{,}6\,\text{m}$ e é longa o suficiente na direcção perpendicular ao plano xy (profundidade) para se desprezarem gradientes térmicos segundo esta direcção. Na superfície $x = 0{,}2\,\text{m}$ é imposta uma temperatura constante e igual a 20°C ($T_{s,1}$). A superfície $x = 0{,}8\,\text{m}$ está submetida a transferências de calor por: (1) convecção devido ao contacto directo com um fluido à temperatura constante de 80°C (T_∞) e com um coeficiente de convecção constante, h; e (2) radiação com as superfícies envolventes (de grandes dimensões) à temperatura T_{sur} ($= T_\infty$). Considere como negra a superfície $x = 0{,}8\,\text{m}$. Considere regime estacionário e despreze resistências térmicas de contacto entre os diferentes materiais.

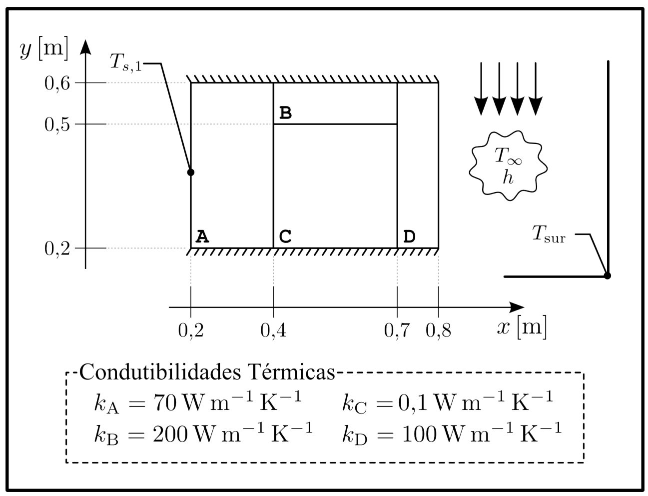


Figura 1

(a) (5 v.) Estabeleça a equação diferencial que governa a distribuição de temperatura na parede, justificando todas as simplificações, bem como as respectivas condições de fronteira.

Solução:

A equação diferencial que governa a distribuição de temperatura na parede do presente problema é obtida através da simplificação da equação de difusão de calor – Equação (1) – aplicada em coordenadas cartesianas (Equação (2)), uma vez que a parede é plana.

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

A Equação (2) deve ser simplificada tendo em conta os dados (especificações) do problema, tal como se segue:

1. como o problema é bidimensional (no plano xy) desprezam-se gradientes de temperatura (fluxos de calor) na direcção ortogonal (direcção z) e, consequentemente, o termo $\partial/\partial z\,(k\partial T/\partial z)$ é nulo;
2. como o regime é estacionário, a temperatura não tem dependência temporal ($i.e.$, $\partial T/\partial t = 0$) e, assim, o único termo do segundo membro da equação, $\rho c_p \partial T/\partial t$, é nulo; e
3. uma vez que não existe geração de energia térmica no interior da parede, o quarto termo do primeiro membro da equação, $\dot{q}$, é nulo.

Com as simplificações descritas, a Equação (2) resulta na Equação (3) que corresponde à equação diferencial que governa a distribuição de temperatura na parede do problema.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0} \tag{3}$$

Note que a condutibilidade térmica não pode ser excluída da Equação (3) uma vez que esta propriedade de transporte não é constante em todo o domínio da parede – cada um dos quatro materiais tem uma condutibilidade térmica diferente.

As condições de fronteira em $x = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$, $y = 0{,}2\,\mathrm{m}$ e $y = 0{,}6\,\mathrm{m}$ são descritas pelas Equações (4), (5), (6) e (7), respectivamente. Em $x = 0{,}2\,\mathrm{m}$ tem-se um valor imposto para a temperatura; em $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ tem-se que o fluxo difusivo de calor é igual à soma de um fluxo de calor convectivo e outro radiativo – esta condição de fronteira é obtida através de um balanço de energia térmica à superfície $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$; e como as superfícies $y = 0{,}2\,\mathrm{m}$ e $y = 0{,}6\,\mathrm{m}$ estão isoladas então correspondem a superfícies adiabáticas (o fluxo de calor que atravessa estas superfícies é nulo).

$\underline{x = 0{,}2\,\mathrm{m}}$**:**

$$\boxed{T(x = 0{,}2\,\mathrm{m}, y) = T_{s,1}} \tag{4}$$

$\underline{x = 0{,}8\,\mathrm{m}}$**:**

$$\boxed{-k_{\mathrm{D}} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0{,}8\,\mathrm{m}} = h[T\,(x = 0{,}8\,\mathrm{m}, y) - T_\infty] + \sigma[T^4\,(x = 0{,}8\,\mathrm{m}, y) - T_{\mathrm{sur}}^4]} \tag{5}$$

$y = 0{,}2\,\mathrm{m}$**:**

$$\boxed{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0{,}2\,\mathrm{m}} = 0} \tag{6}$$

$y = 0{,}6\,\mathrm{m}$**:**

$$\boxed{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0{,}6\,\mathrm{m}} = 0} \tag{7}$$

Como a superfície $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ é considerada negra então a correspondente emissividade (ϵ) é igual a 1 e, consequentemente, a Equação (5) não apresenta esta propriedade na sua formulação. Ainda na Equação (5), considera-se $k = k_{\mathrm{D}}$ – no fluxo difusivo de calor (único termo do primeiro membro) – uma vez que a superfície $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ corresponde a uma interface do Material D com o meio exterior (fluido adjacente e superfícies envolventes).

(b) (3 v.) Qual dos casos considerados na Figura 2 apresenta uma distribuição de temperatura compatível com as condições do problema? Justifique. Note que para cada caso as temperaturas mínima e máxima registadas na parede apresentam-se como limites na respectiva escala de temperatura.

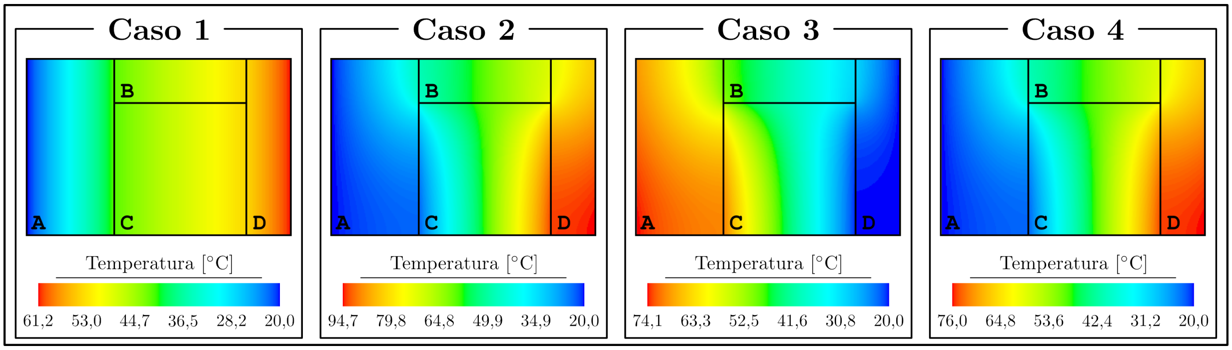


Figura 2

Solução:

- Caso 1 – Errado: embora a gama de temperaturas (20 – 61,2°C) seja compatível com as temperaturas consideradas no enunciado ($T_{s,1}$, T_∞ e T_{sur}) as isotérmicas (linhas de temperatura constante) são perfeitamente perpendiculares ao eixo x ao longo de todo o domínio ($0{,}2\,\mathrm{m} < x < 0{,}8\,\mathrm{m}$) o que denuncia que o problema de condução de calor é unidimensional devido ao facto das condutibilidades térmicas dos Materiais B e C serem iguais (note que as condutibilidades térmicas fornecidas no enunciado para os Materiais B e C são bastante díspares – $k_{\mathrm{B}} = 200\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ *vs.* $k_{\mathrm{C}} = 0{,}1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$).

- Caso 2 – Errado: a temperatura máxima – registada em $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ (= 94,7°C) – é superior às temperaturas do ambiente exterior ($T_\infty = T_{\mathrm{sur}} = 80°\mathrm{C}$).

- Caso 3 – Errado: embora a temperatura mínima observada seja igual ao valor $T_{s,1} = 20°\mathrm{C}$ prescrito, este valor é observado em $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ e não em $x = 0{,}2\,\mathrm{m}$.

- **Caso 4 – Correcto**: tanto os valores de temperatura como a forma das isolinhas deste caso são compatíveis com as condições do problema – condições de fronteira e propriedades de transporte (condutibilidades térmicas dos materiais).

(c) (10 v.) Para um determinado coeficiente de convecção verifica-se, através da solução numérica bidimensional (2D), a existência de uma superfície à temperatura de 41°C (superfície isotérmica) coincidente com o plano $x = 0{,}55\,\mathrm{m}$. Nestas condições, determine o valor considerado para o coeficiente de convecção com base numa aproximação unidimensional de condução de calor que garanta isotérmicas as superfícies perpendiculares ao eixo x.
Sugestão de resolução: comece por calcular a taxa de transferência de calor por unidade de profundidade da parede, q'_x (=q_x/L_z), e posteriormente, a temperatura em $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$.

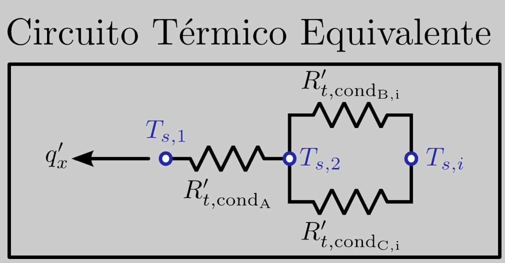
Solução:
Para a determinação do coeficiente de convecção consideram-se as seguintes 3 etapas:

1. cálculo da taxa de transferência de calor por unidade de profundidade da parede, q'_x;
2. cálculo da temperatura $T_{s,4} = T(x = 0{,}8\,\mathrm{m})$ com base no valor q'_x; e
3. cálculo do coeficiente de convecção com base em q'_x e $T_{s,4}$.

A condução de calor considerada nas etapas 1. e 2. é aproximada como unidimensional com as superfícies perpendiculares ao eixo x isotérmicas.

Etapa 1: Cálculo da taxa de transferência de calor por unidade de profundidade da parede, q'_x

q'_x é calculado entre as superfícies $x = 0{,}20\,\mathrm{m}$ e $x = 0{,}55\,\mathrm{m}$. As temperaturas em ambas as superfícies são conhecidas bem como todas as propriedades geométricas e de transporte entre ambas as superfícies para que se possa calcular a resistência térmica total de acordo com a aproximação unidimensional em consideração. O circuito térmico equivalente considerado para o cálculo de q'_x é apresentado na figura seguinte.



Assim, a taxa de transferência de calor por unidade de profundidade da parede é calculada através da Equação (8).

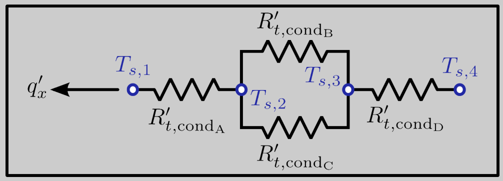
$$\begin{aligned} q'_x = \frac{T_{s,i} - T_{s,1}}{R'_{t,\mathrm{tot}}} \Leftrightarrow q'_x &= \frac{T_{s,i} - T_{s,1}}{\frac{L_{x,\mathrm{A}}}{k_\mathrm{A} L_{y,\mathrm{A}}} + \frac{1}{(k_\mathrm{B} L_{y,\mathrm{B}})/L_{x,i} + (k_\mathrm{C} L_{y,\mathrm{C}})/L_{x,i}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q'_x &= \frac{41 - 20}{\frac{0{,}2}{70 \times 0{,}4} + \frac{1}{(200\times0{,}1)/(0{,}55-0{,}4) + (0{,}1\times0{,}3)/(0{,}55-0{,}4)}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow q'_x \approx 1435{,}247\,\mathrm{W\,m^{-1}} \end{aligned} \tag{8}$$

Na Equação (8), $L_{x,i}$ corresponde à distância – segundo o eixo x – que separa a superfície isotérmica ($x = 0{,}55\,\mathrm{m}$) da interface entre o Material A com os Materiais B e C ($x = 0{,}40\,\mathrm{m}$).

Etapa 2: Cálculo da temperatura $T_{s,4}$ com base no valor q'_x

O circuito térmico equivalente considerado para o cálculo de $T_{s,4}$ é apresentado na figura seguinte. (Note que em alternativa ao circuito térmico apresentado na figura, pode considerar, para o cálculo de $T_{s,4}$, um circuito térmico equivalente entre os nós correspondentes às temperaturas $T_{s,4}$ e $T_{s,i}$.)

Circuito Térmico Equivalente



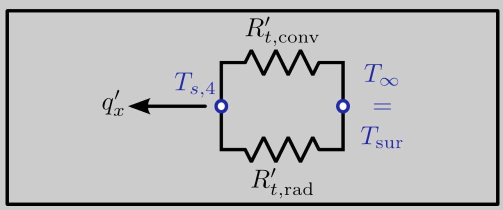
A temperatura da interface entre a parede e o ambiente exterior, $T_{s,4}$, é calculada de acordo com a Equação (9).

$$\begin{aligned} q'_x = \frac{T_{s,4} - T_{s,1}}{R'_{t,\mathrm{tot}}} \Leftrightarrow T_{s,4} = T_{s,1} + q'_x R'_{t,\mathrm{tot}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_{s,4} = T_{s,1} + q'_x \left[\frac{L_{x,\mathrm{A}}}{k_\mathrm{A} L_{y,\mathrm{A}}} + \frac{1}{(k_\mathrm{B} L_{y,\mathrm{B}})/L_{x,B} + (k_\mathrm{C} L_{y,\mathrm{C}})/L_{x,C}} + \frac{L_{x,\mathrm{D}}}{k_\mathrm{D} L_{y,\mathrm{D}}}\right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_{s,4} = 20 + 1435{,}247 \left[\frac{0{,}2}{70 \times 0{,}4} + \frac{1}{(200 \times 0{,}1)/0{,}3 + (0{,}1 \times 0{,}3)/0{,}3} + \right. \\ \left. + \frac{0{,}1}{100 \times 0{,}4}\right] \Leftrightarrow T_{s,4} \approx 55{,}336°\mathrm{C} \end{aligned} \tag{9}$$

Etapa 3: Cálculo do coeficiente de convecção com base em q'_x e $T_{s,4}$

O circuito térmico equivalente considerado para o cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção é apresentado na figura seguinte.

Circuito Térmico Equivalente



Finalmente, obtém-se o valor pretendido de acordo com a Equação (10).

$$\begin{aligned} q'_x = \frac{T_\infty - T_{s,4}}{R'_{t,\mathrm{tot}}} \Leftrightarrow q'_x = \frac{T_\infty - T_{s,4}}{\frac{1}{1/R'_{t,\mathrm{conv}} + 1/R'_{t,\mathrm{rad}}}} \Leftrightarrow q'_x = \frac{T_\infty - T_{s,4}}{\frac{1}{h L_{y,\mathrm{D}} + h_r L_{y,D}}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q'_x = L_{y,\mathrm{D}} h (T_\infty - T_{s,4}) + L_{y,\mathrm{D}} \sigma \left(T_\infty^4 - T_{s,4}^4\right) \Leftrightarrow h = \frac{q'_x - L_{y,\mathrm{D}} \sigma \left(T_\infty^4 - T_{s,4}^4\right)}{L_{y,\mathrm{D}} (T_\infty - T_{s,4})} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h = \frac{1435{,}247 - 0{,}4 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times \left[(80 + 273{,}15)^4 - (55{,}336 + 273{,}15)^4\right]}{0{,}4 \times (80 - 55{,}336)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boxed{h \approx 136{,}492\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}} \end{aligned} \tag{10}$$

(d) (2 v.) Através da solução 2D considerada na alínea anterior verificou-se que a taxa total de transferência de calor por unidade de profundidade da parede (q'_{tot}) para o meio exterior (fluido adjacente e superfícies envolventes) corresponde a $934{,}9\,\mathrm{W\,m^{-1}}$ e que a temperatura em $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ é aproximada pela Equação (1). Com base nestes valores para o desempenho térmico da parede, determine o valor do coeficiente de convecção. (Este procedimento fornece um valor mais preciso para o coeficiente de convecção do que uma aproximação unidimensional.)

$$T(x = 0{,}8\,\mathrm{m}, 0{,}2\,\mathrm{m} \leq y \leq 0{,}6\,\mathrm{m})[^\circ\mathrm{C}] = -29{,}7y[\mathrm{m}] + 70{,}5 \tag{11}$$

Solução:

Aplicando um balanço de energia à superfície $x = 0{,}8\,\mathrm{m}$ tem-se:

$$\dot{E}_{\mathrm{in}} - \dot{E}_{\mathrm{out}} = 0 \tag{12}$$

A Equação (12) pode ser escrita de acordo com a Equação (13). Como a temperatura da interface entre a parede e o ambiente exterior, $T\,(x = 0{,}8\,\mathrm{m}, y)$ $(= T_{s,4})$ não é constante então a taxa de transferência de calor por unidade de profundidade da parede por convecção e radiação (q'_{conv} e q'_{rad}, respectivamente) são obtidos pela integração dos respectivos fluxos de calor ao longo da parede ($0{,}2\,\mathrm{m} \leq l_{y,\mathrm{D}} \leq 0{,}6\,\mathrm{m}$). Note que o coeficiente de transferência de calor por convecção, h, é constante tal como referido no enunciado.

$$\begin{aligned}
L_z q'_{\mathrm{cond}} = L_z\left(q'_{\mathrm{conv}} + q'_{\mathrm{rad}}\right) \Leftrightarrow q'_{\mathrm{tot}} = q'_{\mathrm{conv}} + q_{\mathrm{rad}} \Leftrightarrow q'_{\mathrm{tot}} = \int_{l_{y,\mathrm{D}}} q''_{\mathrm{conv}} dy + \int_{l_{y,\mathrm{D}}} q''_{\mathrm{rad}} dy \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow q'_{\mathrm{tot}} = \int_{l_{y,\mathrm{D}}} h\left(T_\infty - T_{s,4}\right) dy + \int_{l_{y,\mathrm{D}}} \sigma\left(T_\infty^4 - T_{s,4}^4\right) dy \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow h = \frac{q'_{\mathrm{tot}} - \int_{l_{y,\mathrm{D}}} \sigma\left(T_\infty^4 - T_{s,4}^4\right) dy}{\int_{l_{y,\mathrm{D}}} \left(T_\infty - T_{s,4}\right) dy} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow h = \frac{934{,}9 - 5{,}67 \times 10^{-8} \int_{0,2}^{0,6} \left[(80 + 273{,}15)^4 - (-29{,}7y + 70{,}5 + 273{,}15)^4\right] dy}{\int_{0,2}^{0,6} \left(80 - (-29{,}7y + 70{,}5)\right) dy} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \boxed{h \approx 100{,}222\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}}
\end{aligned} \tag{13}$$