7 Estimação por intervalos

Calculada uma estimativa pontual de um parâmetro como avaliar a qualidade dessa estimativa?

- Não é possível! Apenas podemos avaliar estimadores pontuais.
- Complementar uma estimativa pontual de um parâmetro com um intervalo de valores que, com maior "confiança", contenha o valor desconhecido do parâmetro numa população.

7.1 Método pivotal

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $N(\mu, \sigma^2)$ em que o valor de σ^2 é conhecido.

Já vimos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \iff \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Começamos por fixar o **nível de confiança**, $0 < \gamma < 1$.

Determinemos a e b tais que

$$P\left(a \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq b\right) = \gamma$$

Como a solução não é única é necessário introduzir um critério adicional.

Se tomarmos, por mera conveniência, $a = -b$ temos então que $b = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

Resolvendo as duas desigualdades anteriores em ordem a μ:

$$P\left(\bar{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$\therefore IAC_\gamma(\mu) = \left[\bar{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Para $\gamma = 0.95$ tem-se $b = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ e

$$IAC_{0.95}(\mu) = \left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Suponhamos que $\sigma = 3$, $n = 30$ e $\bar{x} = 11.273$. Fazendo os cálculos obtém-se

$$IC_{0.95}(\mu) = [10.199,\ 12.347]\,.$$

Será correto afirmar que

$$P(10.199 \leq \mu \leq 12.347) = 0.95?$$

Não!!!

- γ é uma probabilidade associada ao intervalo aleatório de confiança, ou seja, é a proporção de intervalos de confiança obteníveis que contêm o valor desconhecido do parâmetro.
- γ é o nível de confiança associado ao intervalo de confiança, ou seja, uma medida da confiança que podemos ter de que esse intervalo numérico contenha, de fato, o valor desconhecido do parâmetro.

O que há de geral no exemplo inicial?

$\Longrightarrow$ **Método da variável fulcral ou método pivotal**

Definição

Uma função da amostra aleatória e do parâmetro de interesse, θ, que não depende de quaisquer outros parâmetros com valores desconhecidos e cuja distribuição é completamente conhecida diz-se uma **variável fulcral** ou **pivô** para o parâmetro θ.

E se o valor de σ^2 for também desconhecido?

Neste caso usamos outra variável aleatória,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)},$$

que é uma variável fulcral para μ que não depende de σ^2.

A construção de intervalos de confiança segue os mesmos passos do exemplo anterior.

IC para a variância de uma população normal

Para σ^2 podemos usar a variável fulcral

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Como anteriormente, determinemos a e b tais que

$$P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = \gamma, \text{ para } 0 < \gamma < 1.$$

- Agora a distribuição da variável fulcral não é simétrica!

Uma solução – intervalo central ou de caudas iguais:

1. determinar a tal que $F_{\chi^2_{(n-1)}}(a) = \frac{1-\gamma}{2}$
2. determinar b tal que $F_{\chi^2_{(n-1)}}(b) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$

$$P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = \gamma$$

$$IAC_\gamma(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right]$$

Parâmetros de populações não normais uniparamétricas

- Em geral, a obtenção de variáveis fulcrais não é fácil!
- Com amostras grandes pode ser suficiente o cálculo de intervalos com níveis de confiança aproximados recorrendo, por exemplo, ao Teorema do Limite Central.

Sendo $\mu = E[X]$ de uma população genérica, podemos usar a variável fulcral

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

para construir IC's para o valor esperado de uma qualquer distribuição desde que o tamanho da amostra seja suficientemente grande.

Alternativa mais geral

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição $f_X(x;\theta)$, com n suficientemente grande, e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pelo T. L. C. temos que

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{Var[\bar{X}]}} = \frac{\bar{X} - E[X]}{\sqrt{\frac{Var[X]}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Uma vez que $E[X]$ e $Var[X]$ dependem de θ a variável anterior pode ser usada como uma variável fulcral aproximada para θ.

Exemplo – Uma população de Bernoulli

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição $Ber(p)$. Para n suficientemente grande temos então

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Fixado $0 < \gamma < 1$ então com $a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ tem-se

$$P\left(-a \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq a\right) \approx \gamma$$

Uma solução mais simples

Pode-se mostrar ainda que

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Com esta variável fulcral aproximada tem-se

$$IAC_{\simeq\gamma}(p) = \left[\bar{X} - a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right],$$

com $a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.