3 Variáveis aleatórias

As regras fundamentais do cálculo de probabilidades do capítulo anterior são a base de toda a Teoria da Probabilidade. No entanto, ainda não temos os meios para lidar com experiências aleatórias para além das mais simples.

Temos, por isso, interesse em abandonar a formalização particular de cada experiência aleatória e levar o cálculo de probabilidades para um campo comum e mais familiar – $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ **Variáveis aleatórias**

Exemplo – Um par de tiragens

Considere uma caixa com 4 peças boas (B) e 5 peças defeituosas (D) da qual são retiradas 2 peças ao acaso.

Espaço de resultados: $\Omega = \{BB, BD, DB, DD\}$

$P(BB) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

$P(BD) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18} = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = P(DB)$

$P(DD) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Exemplo – (continuação)

Seja X="número de peças defeituosas nas 2 extracções".

$P(X = 0) = P(\{BB\}) = \frac{1}{6}$

$P(X = 1) = P(\{BD, DB\}) = \frac{5}{9}$

$P(X = 2) = P(\{DD\}) = \frac{5}{18}$

Nota

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = P(\Omega) = 1$

Definição

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ em que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

diz-se uma **variável aleatória**.

Com a introdução de variáveis aleatórias o cálculo de probabilidades passa de

$$P(A),\ A \subset \Omega$$

para

$$P(X \in R),\ R \subset \mathbb{R}.$$

3.1 Função de distribuição

Definição

Seja X uma variável aleatória. A **função de distribuição** de X é definida por

$$F_X(x) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriedades da função de distribuição

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \implies F_X(x) \leq F_X(y)$ (função não decrescente)
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0),\ \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$ (função contínua à direita nos pontos de descontinuidade)

O que acontece em cada ponto?

$P(X \leq x) = P(X < x) + P(X = x)$

$\iff$

$$F_X(x) = F_X(x^-) + P(X = x)$$

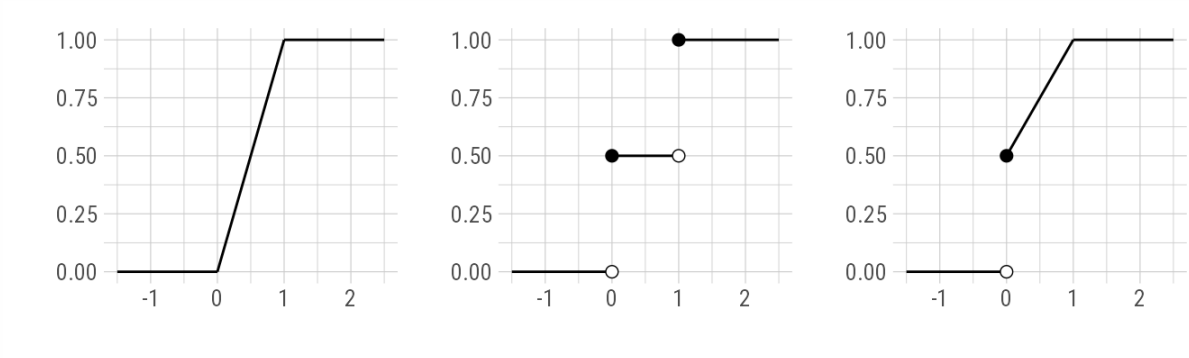
Temos então

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tipos de variáveis aleatórias

Seja D o conjunto (numerável) dos pontos de descontinuidade de F_X.

1. $D = \emptyset \implies$ variável aleatória **contínua**
2. $D \neq \emptyset$ e $P(X \in D) = 1 \implies$ variável aleatória **discreta**
3. $D \neq \emptyset$ e $P(X \in D) < 1 \implies$ variável aleatória **mista**



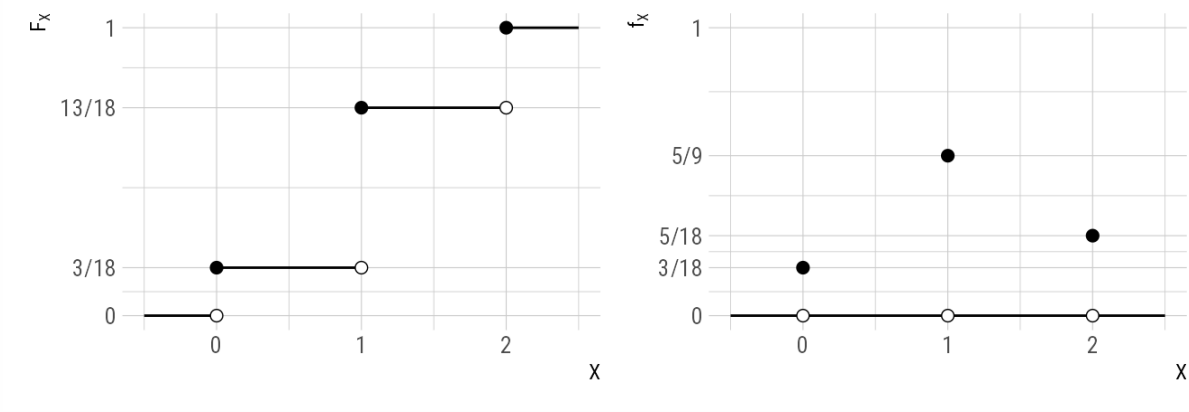
3.2 Variáveis aleatórias discretas

Definição

A **função (massa) de probabilidade** de X é definida por

$$f_X(x) = P(X = x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo – (continuação)



Nota

A função de probabilidade descreve a variação da função de distribuição.

Caracterização de uma função de probabilidade

Uma função f definida em $\mathbb{R}$, positiva apenas num conjunto D, finito ou infinito numerável, tal que

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sum\limits_{x \in D} f(x) = 1$

é uma função de probabilidade.

Notas

1. $P(X \in A) = \sum\limits_{x_i \in A} f_X(x_i), \forall A \subset \mathbb{R}$
2. $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{x_i \leq x} f_X(x_i), \forall x \in \mathbb{R}$

3.3 Variáveis aleatórias contínuas

Já vimos que, quando uma função de distribuição não tem pontos de descontinuidade, a variável aleatória se diz **contínua**.

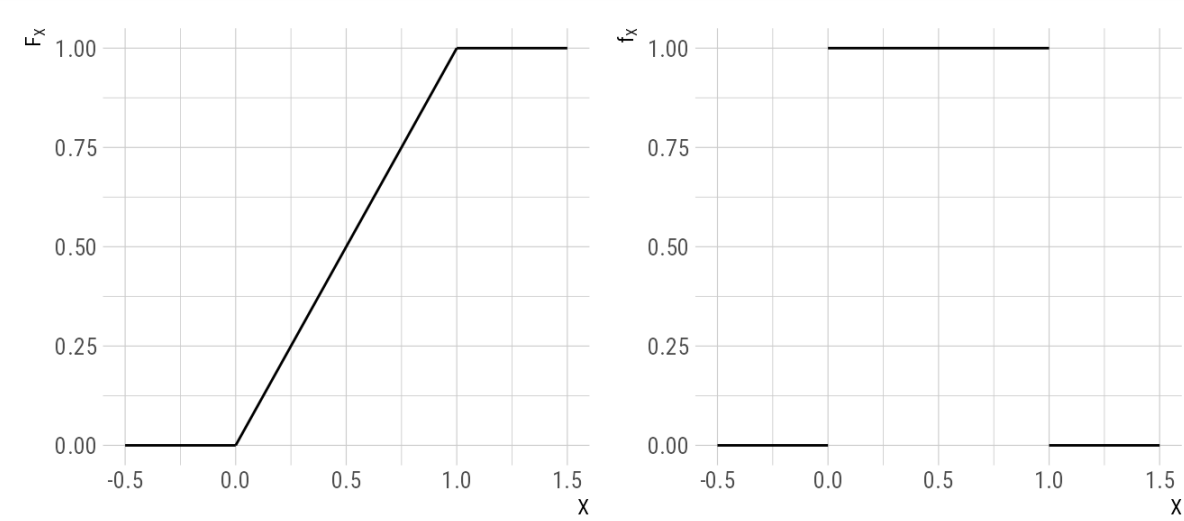
Definição

A função definida por

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx},$$

nos pontos onde F_X é diferenciável, diz-se a **função densidade de probabilidade** da variável aleatória X.

Exemplo – Uma variável aleatória contínua simples



Cálculo de probabilidades

1. $P(X \in A) = \int\limits_A f_X(x)\,dx, \forall A \subset \mathbb{R}$

2. $F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Caracterização de uma função densidade de probabilidade

Uma função f definida em $\mathbb{R}$ tal que

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

é uma função densidade de probabilidade.

3.4 Medidas sumárias de uma variável aleatória

- A função de distribuição ou a função (densidade) de probabilidade são descrições probabilísticas completas de uma variável aleatória.
- Frequentemente há interesse em caracterizar aspetos particulares de uma variável aleatória através do cálculo de medidas numéricas que os quantifiquem.

Vários aspetos de uma variável aleatória podem ser caracterizados:

- **Localização**
- **Dispersão**
- Assimetria, achatamento, etc.

Valor esperado

Definição

O **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória X, caso exista, é dado por

$$E[X] = \sum_i x_i f_X(x_i) \left(= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx \right).$$

Nota

O valor esperado pode não existir!

Seja $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, com $x \in \mathbb{R}$.

Pode mostrar-se que:

1. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1$
2. $\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$ não existe

Nota

O valor esperado de uma variável aleatória não pertence necessariamente ao contradomínio da variável!

Seja $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$E[X] = \sum_i x_i f_X(x_i) = \frac{1}{2}$

Teorema

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, f_X(x_i) \left(= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_X(x)\, dx \right)$$

Corolário

$$E[aX + b] = aE[X] + b,\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Variância, desvio padrão e coeficiente de variação

Definição

A **variância** da variável aleatória X, caso exista, é definida por

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right].$$

O **desvio padrão** de X é igual a $+\sqrt{Var[X]}$.

Algumas propriedades da variância

1. $Var[X] \geq 0$
2. $Var[X] = 0 \iff P(X = c) = 1$
3. $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
4. $Var[aX + b] = a^2 Var[X], \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Definição

O **coeficiente de variação** da variável aleatória X é definido por

$$C_V = \frac{+\sqrt{Var[X]}}{|E[X]|},$$

desde que $E[X] \neq 0$.

Moda

Para além das medidas anteriores há outras que não se baseiam em valores esperados.

Moda(s) de $X = \arg\max_{x \in \mathbb{R}} f_X(x)$

A moda pode . . .

1. não existir

$$f_X(x) = \begin{cases} -\log(x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. ser única (distribuição unimodal)

3. ser múltipla (distribuição multimodal)

4. ser . . . inútil

Quantis

Definição

Para $0 < p < 1$, o valor q_p diz-se o **quantil de ordem p** se

$$\begin{cases} P(X \leq q_p) \geq p \\ P(X \geq q_p) \geq 1 - p \end{cases}$$

ou, equivalentemente, se

$$F_X(q_p^-) \leq p \leq F_X(q_p)$$

No caso discreto, as expressões anteriores são necessárias para calcular quantis.

No caso contínuo o cálculo simplifica-se pois $F_X(x^-) = F_X(x)$.

O quantil q_p é assim qualquer solução da equação:

$$F_X(q_p) = p$$

Alguns quantis notáveis:

- $q_{0.25}$ – **primeiro quartil**
- $q_{0.50}$ – **segundo quartil**
- $q_{0.75}$ – **terceiro quartil**

O segundo quartil é mais conhecido como **Mediana** e é uma importante medida de localização.

A diferença $q_{0.75} - q_{0.25}$ é chamada a **Amplitude Interquartis** que é usada como uma medida de dispersão.

Nenhum quantil é necessariamente único. Na prática usa-se com frequência:

$$q_p = \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ F_X(x^-) \leq p \leq F_X(x) \right\}$$

Exemplo – Um joguinho simples

O jogador A propõe um jogo de dados ao jogador B com as seguintes regras:

O jogador B paga €5 de aposta e lança um dado:

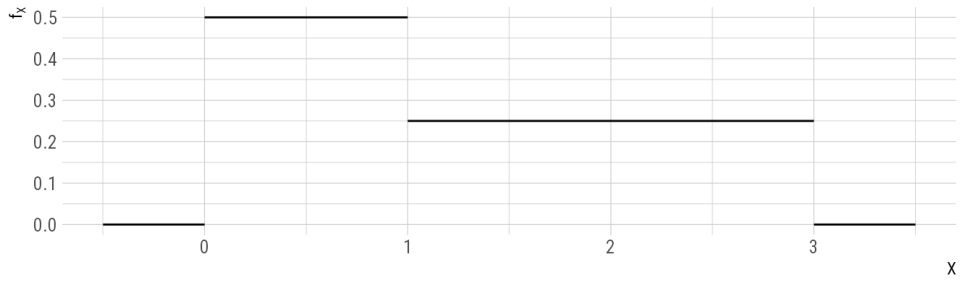
- se sair 4 ou 5 o jogador B recebe o valor da aposta;
- se sair 6 o jogador B recebe €20.

Qual o lucro mais provável do jogador B numa jogada?

Será este um jogo justo?

Exemplo – Medidas de localização

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Qual é o valor da mediana? O valor esperado é igual, menor ou maior do que a mediana? Vale a pena falar da moda?