

9) a)  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \implies \frac{d}{dt}(mv^i + eA^i) - e\partial_i A_j v^j + e\partial_i \Phi = 0 \implies m\dot{v}^i + e\partial_j A^i \dot{x}^j - e\partial_i A_j v^j + e\partial_i \Phi = 0$   
 $\implies m\ddot{\mathbf{x}} = -e(\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)\mathbf{A} + e\nabla(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) - e\nabla\Phi = e\dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\Phi = e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E}$

b)  $p_i := \partial_{v^i} L = mv^i + eA^i$   
 $H = p_i v^i - L = p_i \frac{1}{m}(p^i - eA^i) - \frac{m}{2} \frac{1}{m^2}(p_i - eA_i)(p^i - eA^i) - \frac{e}{m} A_i (p^i - eA^i) + e\Phi = \frac{p_i p^i + e^2 A_i A^i}{2m} - \frac{ep_i A^i}{m} + e\Phi = \frac{(p - eA)^2}{2m} + e\Phi$   
 $\frac{d}{dt} \left[ \frac{(p - eA)^2}{2m} + e\Phi \right] = m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) + e(\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)\Phi$   
 Segundo as eqs. de movimento,  $m(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{x}} \cdot e\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} + \dot{\mathbf{x}} \cdot e\mathbf{E} = 0 - e(\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)\Phi$   
 Logo,  $\dot{H} = 0$

c)  $L$  é  $G$ -invariante, sendo  $G$  a reta gerada por  $u$ ;  $X^u = u$ .  
 Portanto, pelo teorema de Noether,  $J = (p, u) = (m\dot{x} + eA, u)$  é conservado ao longo do movimento.

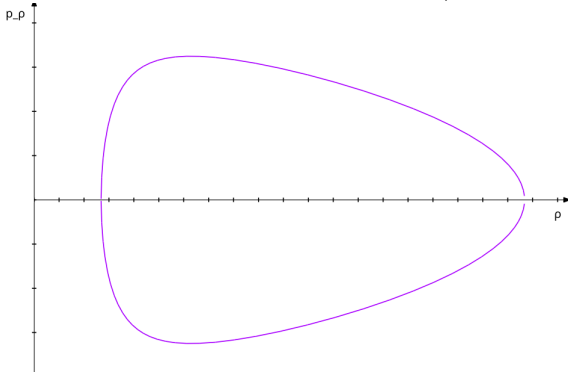
10) a)  $L = K - U = \frac{1}{2}g(v, v) - gz = \frac{\dot{\rho}^2}{2s_\alpha^2} + \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 - g\rho ct_\alpha$   
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \implies \begin{cases} \frac{\dot{\rho}}{s_\alpha^2} = \rho\dot{\varphi}^2 - gct_\alpha \\ 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$

Para  $\rho = r$ :  $\begin{cases} r\dot{\varphi}^2 = gct_\alpha \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$  Ou seja, obtêm-se as seguintes trajetórias:  $(r, \sqrt{\frac{gct_\alpha}{r}}t + \varphi_0)$

b)  $p_\rho = \partial_{\dot{\rho}} L = \frac{\dot{\rho}}{s_\alpha^2}$ ,  $p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L = \rho^2\dot{\varphi}$  Estas transformações são invertíveis, logo  $L$  é hiper-regular.  
 $H = p_i v^i - L = p_\rho^2 s_\alpha^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - \frac{1}{2}p_\rho^2 s_\alpha^2 - \frac{p_\varphi^2}{2\rho^2} + g\rho ct_\alpha = \frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2\rho^2} + g\rho ct_\alpha$   
 $\dot{p}_\varphi = -\partial_\varphi H = 0 \implies \{H, p_\varphi\} = 0 \implies p_\varphi$  é um 1º integral.  
 Portanto,  $dp_\varphi$  e  $dH = p_\rho s_\alpha^2 dp_\rho + \frac{p_\varphi}{\rho^2} dp_\varphi + (gct_\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\rho^3})d\rho$  são independentes num conjunto denso de  $T^*M$  em que  $p_\rho s_\alpha^2 \neq 0 \neq gct_\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\rho^3}$  (ou seja, desde não se esteja no caso da alínea anterior). Logo,  $H$  é completamente integrável.

c)  $\min\{\frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + g\rho ct_\alpha\} = \min\{\frac{l^2}{2\rho^2} + g\rho ct_\alpha\} = \frac{l^2}{2r^2} + grct_\alpha$ ,  $r := \sqrt[3]{\frac{l^2}{gct_\alpha}}$

d)  $k = \frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} + g\rho ct_\alpha \implies p_\rho = \pm \frac{1}{s_\alpha} \sqrt{2k - \frac{l^2}{\rho^2} - 2g\rho ct_\alpha}$



e)  $X_{p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \implies \phi_{2,t} = (0, t, 0, 0)$   $A(0, 2\pi, \beta) = (0, 2\pi, 0, 0) + \beta = \beta$

$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} = p_\rho s_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{p_\varphi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - (gct_\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\rho^3}) \frac{\partial}{\partial p_\rho}$

Fluxo de  $X_H$ :  $\begin{cases} \dot{\rho} = p_\rho s_\alpha^2 \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\rho^2} \\ \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi^2}{\rho^3} - gct_\alpha \\ \dot{p}_\varphi = 0 \end{cases}$

Se seguirmos o fluxo de  $X_H$  a partir de  $(\rho_0, \phi_0)$  durante um certo tempo  $\tau$ , voltaremos a atingir  $\rho_0$ ; mas percorremos um certo ângulo  $\phi$ . Portanto,  $e_1 = (\tau, -\phi)$ .

f) Para  $k = k_0, p_\rho = 0$ : ou seja, ficamos com trajetórias circulares uniformes, ao longo dos paralelos.

Portanto,  $L_{(k_0, l)} = \{(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) : \rho = r, \varphi \in [0, 2\pi[, p_\rho = 0, p_\varphi = l\} \cong S^1$

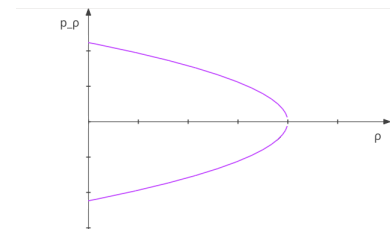
g)  $\dot{p}_\rho = -\partial_\rho H = \frac{l^2}{\rho^3} - gct_\alpha$ . Note-se que  $\dot{p}_\rho > 0$  para  $\rho < r$  e  $\dot{p}_\rho < 0$  para  $\rho > r$ .

Ou seja, quaisquer desvios de  $P_r$  serão compensados, resultando em oscilações em torno de  $\rho = r$ .

h)

$p_\varphi = 0 \implies$  descreve movimentos radiais:

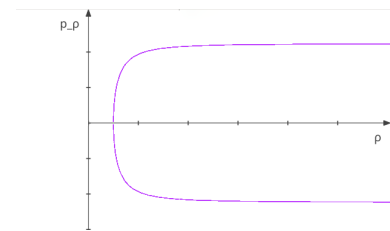
$$L_{(k,0)} = \{(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) : 0 < \rho \leq \frac{p_{\rho 0}^2 s_\alpha^2 - 2k}{2gct_\alpha}, p_\rho = \pm \frac{1}{s_\alpha} \sqrt{2k - 2g\rho c t_\alpha}, p_\varphi = 0\}$$



i)

$k = \frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2}$ ; descreve órbitas abertas:

$$L_{(k,0)} = \{(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) : \rho > \frac{l^2}{2k - p_\rho^2 s_\alpha^2}, p_\rho = \pm \frac{1}{s_\alpha} \sqrt{2k - \frac{l^2}{\rho^2}}, p_\varphi = 0\} \cong \mathbb{R} \times S^1$$



j)  $k = \frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} \implies$  descreve órbitas abertas radiais com velocidade constante.

$$L_{(k,0)} = \{(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) : p_\rho = \pm \frac{\sqrt{2k}}{s_\alpha}, p_\varphi = 0\} \cong \mathbb{R} \times S^1$$

k)  $0 = \frac{p_\rho^2 s_\alpha^2}{2} \implies$  a partícula fica na sua posição inicial.

$$L_{(k,0)} = \{(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) : p_\rho = 0, p_\varphi = 0\} \cong \mathbb{R} \times S^1$$

**11** a)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \implies \begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - r + \frac{1}{r^3} \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

b)  $\ddot{r} = \dot{r} = 0 \implies \begin{cases} r^4(\dot{\theta}^2 - 1) = -1 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \implies (r, \theta) = \left( \frac{1}{\sqrt[4]{1 - (v^\theta)^2}}, v^\theta t + \theta_0 \right)$

Pontos de equilíbrio:  $\dot{r} = 0 = \dot{\theta} \implies (r, \theta) = (1, \theta_0)$

c)  $p_r = \partial_{\dot{r}} L = \dot{r}$ ,  $p_\theta = \partial_{\dot{\theta}} L = r^2 \dot{\theta}$  Estas transformações são invertíveis, logo  $L$  é hiper-regular.

$$H = p_i v^i - L = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

d)  $\dot{p}_\theta = -\partial_\theta H = 0 \implies \{H, p_\theta\} = 0 \implies p_\theta$  é um 1º integral.

Portanto,  $dp_\theta$  e  $dH = p_r dp_r + \frac{p_\theta}{r^2} dp_\theta + \left( r - \frac{p_\theta^2 + 1}{r^3} \right) dr$  são independentes num conjunto denso de  $T^*M$  em que  $p_r \neq 0 \neq r - \frac{p_\theta^2 + 1}{r^3}$  (ou seja, desde não se esteja no caso da alínea b)). Logo,  $H$  é completamente integrável.

e)  $\dot{p}_r = -\partial_r H = r - \frac{p_\theta^2 + 1}{r^3}$ . Note-se que  $\dot{p}_r > 0$  para  $r < r$  e  $\dot{p}_r < 0$  para  $r > r$ .

Ou seja, quaisquer desvios do equilíbrio serão compensados, resultando em oscilações em torno de  $r = 1$ .

f) Esta restrição é dada por  $X = r_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - r_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ .  $X$  está no núcleo de  $\omega = r_1 d\theta_1 + r_2 d\theta_2$ .

$\omega \wedge d\omega = r_1 r_2 (dr_1 \wedge d\theta_1 + dr_2 \wedge d\theta_2 + d\theta_1 \wedge d\theta_2) \neq 0$ , pelo que a restrição não é holonómica.

Como a força de reação é perfeita,  $\mathcal{R} = \lambda\omega$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \lambda \omega_i \\ r_1 \dot{\theta}_1 + r_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r}_1 = r_1 \dot{\theta}_1^2 - r_1 + \frac{1}{r_1^3} \\ \ddot{r}_2 = r_2 \dot{\theta}_2^2 - r_2 + \frac{1}{r_2^3} \\ 2r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 + r_1^2 \ddot{\theta}_1 = \lambda r_1 \\ 2r_2 \dot{r}_2 \dot{\theta}_2 + r_2^2 \ddot{\theta}_2 = \lambda r_2 \\ r_1 \dot{\theta}_1 + r_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{r}_1 = r_1 \dot{\theta}_1^2 - r_1 + \frac{1}{r_1^3} \\ \ddot{r}_2 = r_2 \dot{\theta}_2^2 - r_2 + \frac{1}{r_2^3} \\ 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 = 2\dot{r}_2 \dot{\theta}_2 + r_2 \ddot{\theta}_2 \\ r_1 \dot{\theta}_1 + r_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$$

**12** a)  $X^V = \frac{d}{dt}(e^{itV} \cdot (r, \theta))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(r, \theta + tV)|_{t=0} = (0, V)$

b)  $J(V) = (p_r dr + p_\theta d\theta)(V\partial_\theta) = V p_\theta \implies J = p_\theta$

c)  $\omega = dp_i \wedge dx^i = dp_r \wedge dr + dp_\theta \wedge d\theta$

$$B(dF, dG) = X_F(G) = \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) G = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \implies B = \frac{\partial}{\partial p_r} \otimes \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \otimes \frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{\partial}{\partial p_\theta} \otimes \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial}{\partial p_\theta}$$

d) As funções  $G$ -invariantes são claramente as que não dependem de  $\theta$ . Portanto, seguindo o cálculo anterior,  $B$  reduz-se para  $B' = \frac{\partial}{\partial p_r} \otimes \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \otimes \frac{\partial}{\partial p_r}$

$\iota(p_\theta)B' = 0$ . Logo, as folhas simpléticas são os conjuntos de nível de  $p_\theta$  em  $(r, p_r, p_\theta)$ , e  $p_\theta$  é uma função de Casimir.

e)  $\{H, J\} = B(H, p_\theta) = 0 \implies H$  é invariante sob  $SO(2)$ .

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} = p_r \partial_r + \frac{p_\theta}{r^2} \partial_\theta - \left( -\frac{p_\theta^2}{r^3} + u' \right) \partial_{p_r}$$

O fluxo de  $H$  em  $Q$  é dado por: 
$$\begin{cases} \dot{r} = p_r \\ \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3} - u' \\ \dot{p}_\theta = 0 \end{cases}$$

---

f) Pelo Teorema de Noether,  $J(V) = V p_\theta$  é conservado ao longo do fluxo de  $H$ ,  $\forall V \in \mathbb{R}$ .